



CENTRO UNIVERSITÁRIO DE BRASÍLIA – UNICEUB
FACULDADE DE TECNOLOGIA E CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS - FATECS
CURSO: ENGENHARIA CIVIL

AMANDA BORBA ABDULMASSIH

**ESTUDO DEMONSTRATIVO E COMPARATIVO DO MÉTODO DE RAYLEIGH-
RITZ E MÉTODO DE GALERKIN APLICADOS NA ENGENHARIA CIVIL**

BRASÍLIA
2018

AMANDA BORBA ABDULMASSIH

**ESTUDO DEMONSTRATIVO E COMPARATIVO DO MÉTODO DE RAYLEIGH-
RITZ E MÉTODO DE GALERKIN APLICADOS NA ENGENHARIA CIVIL**

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC)
apresentado como parte dos requisitos
necessários para a obtenção do título de
Engenheiro Civil pelo Centro Universitário
de Brasília - UniCEUB

Orientador: Físico Ednardo Paulo Spaniol,
D. Sc.

BRASÍLIA

2018

AMANDA BORBA ABDULMASSIH

**ESTUDO DEMONSTRATIVO E COMPARATIVO DO MÉTODO DE RAYLEIGH-
RITZ E MÉTODO DE GALERKIN APLICADOS NA ENGENHARIA CIVIL**

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC)
apresentado como um dos requisitos para
a conclusão do curso de Engenharia Civil
do UniCEUB - Centro Universitário de

Brasília

Orientador: Físico Ednardo Paulo Spaniol,
D. Sc.

Brasília, dezembro de 2018.

Banca Examinadora

Físico Ednardo Paulo Spaniol, D. Sc.
Orientador

Banca Examinadora

Banca Examinadora

Agradecimentos

Gostaria de dedicar este trabalho a todos que fizeram parte da minha trajetória ao longo do curso de Engenharia Civil, ressaltando:

Primeiramente à Deus, tendo em vista todos os obstáculos que foram superados para que eu pudesse concluir o curso no período de 5 anos;

A Maria Elisa Borba, minha mãe, que nunca me deixou desistir e sempre me apoiou e incentivou para que eu me tornasse uma pessoa melhor, me proporcionando sempre o melhor;

A Victoria, Any, Nadjonei, Ana Luiza, Viviane, Fernanda, Luiz Henrique, Júlia, Dara, e todos os meus outros amigos, que sempre foram compreensíveis quanto às minhas prioridades, e que sempre estiveram ao meu lado nos momentos bons e me apoiaram nos momentos ruins;

Ao Pedro, Osmar, Rhafael, Ricardo, Jefferson, Abdon, Lucas, Rodrigo, Amanda, Camila, Maria Flávia, Newton e Vitor, meus colegas de turma, que se tornaram mais que amigos e pessoas as quais desejo levar para o resto de minha vida, que alegraram meus dias, transformaram o ambiente de estudos em um lugar prazeroso e divertido e que nunca hesitaram em compartilhar conhecimento;

Ao Luiz Paulo França, meu companheiro, que esteve comigo ao longo desses anos, sempre me incentivando a crescer e me mostrando uma visão diferente de todas as situações da vida;

A todos os meus familiares, avôs e avós, que sempre me proporcionaram o melhor que puderam para que eu tivesse boas oportunidades na vida;

Por fim, pessoa indispensável para o sucesso desse trabalho, ao meu orientador, Ednardo Spaniol, que esteve disposto a assumir um compromisso durante o período em que esse trabalho foi feito, sempre disponível para me ajudar.

Resumo

O Método de Rayleigh-Ritz e o Método de Galerkin consistem em encontrar uma função aproximadora, que pode ser polinomial ou trigonométrica, que resulte em uma solução igual ou próxima da solução exata para uma equação diferencial. Esses métodos foram criados muitos anos atrás porém só foram viabilizados após a criação de softwares, por conta dos cálculos extensos. Os métodos servem de base para o Método dos Elementos Finitos, que possibilita a análise estrutural em elementos estruturais não lineares. Neste trabalho foram comparadas as soluções para deflexão máxima para 6 funções polinomiais e 6 funções trigonométricas, em uma viga linear bi-apoiada sujeita à uma carga distribuída ao longo de seu eixo, para ambos os métodos. Os métodos foram implementados e resolvidos por meio do software Maple. Os resultados obtidos foram satisfatórios e as conclusões são que a dificuldade para o Método de Rayleigh-Ritz é determinar o funcional que representa o problema, enquanto para o Método de Galerkin as funções aproximadoras devem apresentar ortogonalidade e para esse método, para o caso estudado as funções polinomiais não são satisfatórias. Além disso, o Método de Galerkin é mais utilizado pelo fato de que a maioria dos problemas consistem em encontrar uma solução para uma equação diferencial, e não para um funcional. As funções trigonométricas são mais facilmente manipuladas, desse modo, recomenda-se utilizar as mesmas principalmente quando não se sabe a base da solução do seu problema.

Palavras - chave: Método de Rayleigh-Ritz, Método de Galerkin, Método dos Elementos Finitos, Maple.

Abstract

The Rayleigh-Ritz Method and the Galerkin Method consist of finding an approximation function, which can be polynomial or trigonometric, that results in a solution equal to or close to the exact solution for a differential equation. These methods were created many years ago but were only feasible after the creation of softwares, because the calculations are extensive. The methods serve as a basis for the Finite Element Method, which enables structural analysis in nonlinear structural elements. In this essay the solutions for maximum deflection, for 6 polynomial functions and 6 trigonometric functions, were compared in a biapoided linear beam subjected to a distributed force along its axis, for both methods. The methods were implemented and solved through Maple software. The results obtained were satisfactory and the conclusions are that the difficulty for the Rayleigh-Ritz Method is to determine the functional that represents the problem, whereas for the Galerkin Method the approximation functions must show some type of orthogonality and for this method, in this studied case the polynomial functions are not satisfactory. In addition, the Galerkin Method is most commonly used because most problems consist of finding a solution to a differential equation, not for a functional. Trigonometric functions are more easily manipulated, so it is recommended to use them mainly when the basis of the solution to your problem is not known.

Keywords: Rayleigh-Ritz Method, Galerkin Method, Finite Element Method, Maple.

Sumário

1	Introdução	1
2	Objetivos	4
2.1	Objetivo Geral	4
2.2	Objetivos Específicos	4
3	Revisão Bibliográfica	6
3.1	Cálculo Variacional	6
3.2	Método Rayleigh-Ritz	8
3.3	Método de Galerkin	15
3.4	Introdução ao Método dos Elementos Finitos	20
4	Metodologia	28
5	Apresentação e Análise de Resultados	30
6	Considerações Finais	43
6.1	Conclusão	43
6.2	Sugestões de Pesquisas Futuras	44
7	Referências Bibliográficas	45
8	ANEXO A	46

Capítulo 1

Introdução

Com o passar dos anos e com o avanço das tecnologias, surgiram sistemas construtivos em que os elementos estruturais nem sempre são lineares ou de geometria abstrata, como por exemplo nas obras de Santiago Calatrava conforme as figuras 1 e 2. o Método dos Elementos Finitos foi que possibilitou esse avanço, sendo possível fazer a análise estrutural desses elementos.

Figura 1 - Estação World Trade Center - NY



Fonte: Hufon+Crow, Imagen Subliminal, 2016.

Figura 2 - Palacio de las Artes Reina Sofía - Valencia



Fonte: Diliff, 2007.

A análise estrutural é de grande importância na construção civil, pois visa compreender o comportamento das estruturas. De uma forma geral, a análise estrutural tem como objetivo definir o deslocamento e deformação na estrutura, assim como determinar os esforços atuantes.

O Método dos Elementos Finitos se baseia no Método de Rayleigh-Ritz e no Método de Galerkin, que são o foco deste trabalho. Os métodos assemelham-se e são baseados em encontrar uma função aproximadora, que facilite o cálculo da equação diferencial, e que gere um resultado próximo ou igual a solução exata. Podem ser aplicados em estruturas lineares e não-lineares. Os métodos não são aplicáveis apenas na Engenharia Civil, estes podem também ser aplicados em problemas de Física e outras ciências.

Segundo Lotti et. al. (2004), o início do desenvolvimento destas metodologias ocorreu no final do século XVIII, contudo tornou-se possível a sua viabilização somente com o advento dos recursos computacionais, os quais facilitaram a resolução das equações algébricas. Alguns dos softwares que tem como base o Método dos Elementos Finitos para análises estruturais são: Ansys, Abaqus e SAP2000.

Uma das dificuldades dos métodos é encontrar a função aproximadora que resulte em uma solução que mais se aproxime da solução exata, pois esta pode ser uma função de muitos termos, tornando os cálculos muito complexos. Por isso, é necessário o auxílio de softwares para efetuar os cálculos. Para este trabalho, foi utilizado o Maple, que é uma sistema computacional para resolver equações.

No capítulo 3, será apresentado o cálculo variacional, os Métodos de Rayleigh-Ritz e de Galerkin, e será introduzido o Método dos Elementos Finitos. Os métodos serão aplicados em exemplos para melhor compreensão.

No capítulo 4, será considerada uma viga linear submetida a uma carga distribuída para analisar seu comportamento quanto à flambagem, comparando as soluções para a deflexão máxima obtidas pelos métodos de Rayleigh-Ritz e de Galerkin, considerando funções aproximadoras polinomiais e trigonométricas.

No capítulo 5, serão citadas as conclusões atingidas a partir dos resultados da aplicação e comparação dos métodos e também sugestões para pesquisas futuras.

Capítulo 2

Objetivos

2.1 Objetivo Geral

Demonstrar as teorias de Rayleigh-Ritz e Galerkin e introduzir o Método dos Elementos Finitos, com exemplos e explicitando todas as contas. Além disso, comparar os métodos aplicando em um elemento estrutural da construção civil.

2.2 Objetivos Específicos

- Introduzir o cálculo variacional;
- Apresentar as teorias de Rayleigh-Ritz e Galerkin;
- Citar exemplos;
- Introduzir o Método dos Elementos Finitos;
- Criar um material didático com os cálculos mais explícitos do que é usualmente encontrado na literatura;
- Aplicar os métodos em um elemento estrutural da construção civil;
- Implementar os métodos no software Maple;
- Comparar as soluções aproximadas com as soluções exatas;

- Comparar as soluções de funções aproximadoras polinomiais e trigonométricas;
- Aprender a escrever em formato Latex.

Capítulo 3

Revisão Bibliográfica

3.1 Cálculo Variacional

No cálculo variacional, são utilizados funcionais, não funções. Um funcional depende de uma função, ou seja, é uma função de outra função. O cálculo variacional estuda os métodos que possibilitam achar os extremos dos funcionais. O cálculo variacional tem como objetivo encontrar uma função $y(x)$ que seja a solução exata para minimizar um funcional, dentre todas as funções admissíveis.

Considera-se o seguinte funcional:

$$Y = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx. \quad (3.1)$$

Relembrando as propriedades:

$$\frac{d}{dx}(\delta F) = \delta \left(\frac{dF}{dx} \right) \quad (3.2)$$

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} \delta F dx. \quad (3.3)$$

Logo,

$$\delta Y = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx. \quad (3.4)$$

Em geral, o objetivo é extremizar o funcional, para isso é necessário que haja um parâmetro. Podemos reescrever o funcional em termos de $\bar{y}(x)$:

$$\bar{Y} = \int_{x_1}^{x_2} F(x, \bar{y}, \bar{y}') dx. \quad (3.5)$$

O parâmetro λ é o responsável pela identificação das famílias e funções $\bar{y}(x)$, sendo que, para $\lambda = 0$:

$$\bar{Y} = Y \quad e \quad \bar{y}(x) = y(x). \quad (3.6)$$

A primeira variação do funcional é

$$\delta \bar{Y} = \frac{d\bar{Y}}{d\lambda} \delta \lambda \quad (3.7)$$

e obtem-se a partir da condição de estacionariedade:

$$\delta \bar{Y} = 0 \quad \therefore \quad \frac{d\bar{Y}}{d\lambda} = 0, \quad (3.8)$$

o que nos leva a

$$\frac{d\bar{Y}}{d\lambda} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dF}{d\lambda} dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \frac{d\bar{y}}{d\lambda} + \frac{\partial F}{\partial \bar{y}'} \frac{d\bar{y}'}{d\lambda} \right) dx. \quad (3.9)$$

Sendo que:

$$\bar{y}(x) = y(x) + \lambda \eta(x) \quad \therefore \quad \frac{d\bar{y}}{d\lambda} = \eta(x) \quad (3.10)$$

$$\bar{y}'(x) = y'(x) + \lambda \eta'(x) \quad \therefore \quad \frac{d\bar{y}'}{d\lambda} = \eta'(x), \quad (3.11)$$

substituindo na integral:

$$\left(\frac{d\bar{Y}}{d\lambda} \right)_{\lambda=0} = \left[\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \eta + \frac{\partial F}{\partial \bar{y}'} \eta' \right) dx \right]_{\lambda=0} \quad (3.12)$$

$$\left(\frac{d\bar{Y}}{d\lambda} \right)_{\lambda=0} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y} \eta dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' dx. \quad (3.13)$$

Resolvendo a segunda integral, tem-se

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' dx; \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = u \quad e \quad \eta' dx = dv, \quad (3.14)$$

lembrando que

$$\int u dv = uv - \int v du, \quad (3.15)$$

então,

$$du = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) dx; \quad dv = \eta' dx \quad \therefore \quad v = \eta \quad (3.16)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' dx = \left. \frac{\partial F}{\partial y'} \eta \right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) dx; \quad \eta(x_1) = \eta(x_2) = 0. \quad (3.17)$$

Voltando para a integral, considerando $\delta Y = 0$ tem-se

$$\left(\frac{d\bar{Y}}{d\lambda} \right)_{\lambda=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \eta - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta \right] dx = 0, \quad (3.18)$$

deixando η em evidência

$$\left(\frac{d\bar{Y}}{d\lambda} \right)_{\lambda=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \eta dx = 0, \quad (3.19)$$

conclui-se que

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (3.20)$$

que é a Equação de Euler-Lagrange.

3.2 Método Rayleigh-Ritz

No método de Rayleigh-Ritz, substitui-se a função $y(x)$ por uma função aproximada $v(x)$, composta por uma combinação linear de funções $\phi_i(x)$. A função $v(x)$ é aplicada no funcional para que este seja minimizado.

Para encontrar a função $v(x)$ que minimiza o funcional:

$$Y = \int F(x, y, y') dx, \quad (3.21)$$

sendo as condições de contorno:

$$y(x_1) = y(x_2) = 0, \quad (3.22)$$

a função aproximadora $v(x)$ é:

$$y(x) \cong v(x) = \sum_{i=1}^n a_i \phi_i(x) \quad (3.23)$$

As funções ϕ_i são chamadas funções de forma, são linearmente independentes e contínuas até o grau $(n-1)$, sendo m a ordem da maior derivada do funcional. Cada uma dessas funções satisfaz as condições de contorno:

$$\phi_i(x_1) = \phi_i(x_2) = 0 \quad (3.24)$$

$i = 1, 2, \dots, n;$

a_i : parâmetros de deslocamentos = parâmetros nodais.

Substituindo y por v no funcional e impondo a condição de mínimo:

$$\delta Y = \frac{\partial Y}{\partial a_1} \delta a_1 + \frac{\partial Y}{\partial a_2} \delta a_2 + \dots + \frac{\partial Y}{\partial a_n} \delta a_n = 0, \quad (3.25)$$

δa_i são arbitrárias, por isso, a equação acima é reduzida em um sistema de equações homogêneas que vai de acordo com o método variacional:

$$\frac{\partial Y}{\partial a_i} = 0 \quad (3.26)$$

$i = 1, 2, \dots, n.$

Geralmente, se aumentar o número n de termos da função $v(x)$, a solução é melhorada. De acordo com Assan(2003,p. 36), para se encaminhar à solução exata, deve-se satisfazer as seguintes condições:

- "As funções aproximadoras $v(x)$ devem ser contínuas até uma ordem menor do que a maior derivada do integrando;
- Cada função $\phi_i(x)$ deve satisfazer, individualmente, as condições essenciais de contorno;
- A sequência de funções deve ser completa. Diz-se que $v(x)$ é completa quando a seguinte condição é satisfeita:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_1}^{x_2} \left(y - \sum_{i=1}^n a_i \phi_i \right)^2 dx < \lambda, \quad (3.27)$$

sendo λ um número tão pequeno como se deseja."

As duas primeiras condições são satisfeitas por funções chamadas admissíveis. Para certificar-se da convergência do método, são consideradas duas ou mais tentativas para a função aproximadora, comparando os valores $Y^{(i)}$ do funcional obtido com a seguinte sequência:

$$v^{(1)} = a_1^{(1)} \phi_1^{(1)} \quad (3.28)$$

$$v^{(2)} = a_1^{(2)} \phi_1^{(2)} + a_2^{(2)} \phi_2^{(2)} \quad (3.29)$$

que pode ser generalizada por

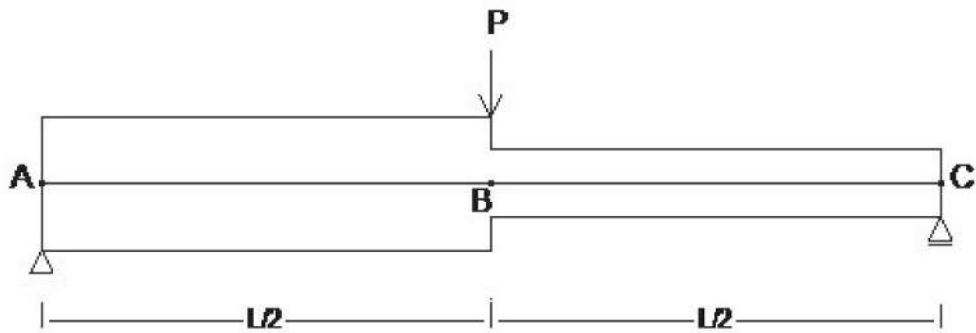
$$v^{(n)} = a_1^{(n)} \phi_1^{(n)} + a_2^{(n)} \phi_2^{(n)} + \dots + a_n^{(n)} \phi_n^{(n)}. \quad (3.30)$$

Dessa forma,

$$Y^{(1)} \geq Y^{(2)} \geq \dots \geq Y^{(n)}. \quad (3.31)$$

Para melhor compreensão do método, considere a viga de seção variável da figura abaixo:

Figura 3 - Viga de seção variável



Fonte: Próprio autor, 2018.

Como há variação de inércia entre as seções da viga, serão adotadas duas funções aproximadas, uma para cada trecho:

$$v_1(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad \text{trecho AB}, \quad (3.32)$$

$$v_2(\bar{x}) = b_0 + b_1\bar{x} + b_2\bar{x}^2 + b_3\bar{x}^3 \quad \text{trecho BC}, \quad (3.33)$$

sendo que x e \bar{x} variam de 0 a $\frac{l}{2}$ e representam um ponto da viga em que se quer encontrar a deflexão para cada trecho.

A partir da primeira condição de contorno, que é

$$v_1(0) = v_2\left(\frac{l}{2}\right) = 0, \quad (3.34)$$

obtem-se:

$$v_1(0) = a_0 + a_1 0 + a_2 0^2 + a_3 0^3 = 0 \quad \therefore \quad a_0 = 0 \quad (3.35)$$

$$v_2\left(\frac{l}{2}\right) = b_0 + \frac{b_1 l}{2} + \frac{b_2 l^2}{4} + \frac{b_3 l^3}{8} = 0 \quad \therefore \quad b_0 = -\frac{b_1 l}{2} - \frac{b_2 l^2}{4} - \frac{b_3 l^3}{8}. \quad (3.36)$$

A segunda condição é

$$v_1''(0) = v_2''\left(\frac{l}{2}\right) = 0 \quad (3.37)$$

então,

$$v_1''(0) = 2a_2 + 6a_3 0 = 0 \quad \therefore \quad a_2 = 0 \quad (3.38)$$

$$v_2''\left(\frac{l}{2}\right) = 2b_2 + \frac{6b_3 l}{2} = 0 \quad \therefore \quad b_2 = -\frac{3b_3 l}{2}. \quad (3.39)$$

A terceira condição é

$$v_1'\left(\frac{l}{2}\right) = v_2'(0) \quad (3.40)$$

assim,

$$v_1'\left(\frac{l}{2}\right) = a_1 + \frac{3a_3 l^2}{4} \quad (3.41)$$

$$v_2'(0) = b_1 + 2b_2 0 + 3b_3 0^2 \quad \therefore \quad v_2'(0) = b_1 \quad (3.42)$$

logo,

$$b_1 = a_1 + \frac{3a_3 l^2}{4}. \quad (3.43)$$

A última condição a ser satisfeita é

$$v_1\left(\frac{l}{2}\right) = v_2(0), \quad (3.44)$$

dessa forma,

$$v_1\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{a_1 l}{2} + \frac{a_3 l^3}{8} \quad (3.45)$$

$$v_2(0) = b_0 + b_1 0 + b_2 0^2 + b_3 0^3 \quad \therefore \quad v_2(0) = b_0, \quad (3.46)$$

podendo assim concluir que

$$b_0 = -\frac{b_1 l}{2} + \frac{b_3 l^3}{8} - \frac{b_3 l^3}{8} \quad \therefore \quad b_0 = -\frac{b_1 l}{2} + \frac{b_3 l^3}{4} \quad (3.47)$$

$$\frac{a_1 l}{2} + \frac{a_3 l^3}{8} = -\frac{b_1 l}{2} + \frac{b_3 l^3}{4} \quad (3.48)$$

$$\frac{a_1 l}{2} + \frac{a_3 l^3}{8} + \left(a_1 + \frac{3a_3 l^2}{4}\right) \frac{l}{2} = \frac{b_3 l^3}{4} \quad \therefore \quad b_3 = \frac{4a_1}{l^2} + 2a_3 \quad (3.49)$$

Fazendo as substituições, tem-se

$$b_2 = -\frac{3b_3 l}{2} = -\frac{3l}{2} \left(\frac{4a_1}{l^2} + 2a_3\right) \quad \therefore \quad b_2 = -\frac{6a_1}{l} - 3a_3 l \quad (3.50)$$

$$b_0 = -\frac{b_1 l}{2} + \frac{b_3 l^3}{4} = -\frac{l}{2} \left(a_1 + \frac{3a_3 l^2}{4}\right) + \frac{l^3}{4} \left(\frac{4a_1}{l^2} + 2a_3\right) \quad \therefore \quad b_0 = \frac{a_1 l}{2} + \frac{a_3 l^3}{8}. \quad (3.51)$$

Considerando que o funcional que representa a energia potencial total da viga é:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{l}{2}} EI_1 (v_1'')^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{l}{2}} EI_2 (v_2'')^2 d\bar{x} - \frac{1}{2} Pl \left(a_1 + \frac{l^2 a_3}{4}\right), \quad (3.52)$$

sendo que a primeira integral representa o trecho AB, a segunda integral o trecho BC, a última parte do funcional corresponde à condição de compatibilidade no ponto B (onde as duas funções aproximadoras são iguais), E: módulo de elasticidade e I: inércia.

Derivando duas vezes a função $v_1(x)$, tem-se:

$$v_1(x) = a_1 x + a_3 x^3 \quad (3.53)$$

$$v_1'(x) = a_1 + 3a_3 x^2 \quad (3.54)$$

$$v_1''(x) = 6a_3 x. \quad (3.55)$$

E agora derivando duas vezes, também, a função $v_2(\bar{x})$:

$$v_2(\bar{x}) = \frac{a_1 l}{2} + \frac{a_3 l^3}{8} + \left(a_1 + \frac{3a_3 l^2}{4}\right) \bar{x} + \left(-\frac{6a_1}{l} - 3a_3 l\right) \bar{x}^2 + \left(\frac{4a_1}{l^2} + 2a_3\right) \bar{x}^3 \quad (3.56)$$

$$v_2'(\bar{x}) = a_1 + \frac{3a_3 l^2}{4} - \frac{12a_1 \bar{x}}{l} - 6a_3 l \bar{x} + \frac{12a_1 \bar{x}^2}{l^2} + 6a_3 \bar{x}^2 \quad (3.57)$$

$$v_2''(\bar{x}) = -\frac{12a_1}{l} - 6a_3l + \frac{24a_1\bar{x}}{l^2} + 12a_3\bar{x}. \quad (3.58)$$

Resolvendo a parte do funcional que representa o trecho AB fica

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{l}{2}} EI_1(6a_3)^2 dx \quad (3.59)$$

$$\Pi_1 = \frac{3a_3^2 l^3 EI_1}{4}. \quad (3.60)$$

Para resolver a segunda parte do funcional, que representa o trecho BC, primeiramente será efetuado o quadrado da segunda derivada de $v_2(\bar{x})$

$$[v_2''(\bar{x})]^2 = \left(-\frac{12a_1}{l} - 6a_3l + \frac{24a_1\bar{x}}{l^2} + 12a_3\bar{x} \right)^2 \quad (3.61)$$

$$[v_2''(\bar{x})]^2 = \frac{144a_1^2}{l^2} + 144a_1a_3 - \frac{288a_1^2\bar{x}}{l^3} - \frac{576a_1a_3\bar{x}}{l} + 36a_3^2l^2 \quad (3.62)$$

$$-144a_3^2l\bar{x} - \frac{288a_1^2\bar{x}}{l^3} + \frac{576a_1^2\bar{x}^2}{l^4} - \frac{576a_1a_3\bar{x}^2}{l^2} + 144a_3^2\bar{x}^2. \quad (3.63)$$

Substituindo agora no funcional para o trecho BC:

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{l}{2}} EI_2 \left(\frac{144a_1^2}{l^2} + 144a_1a_3 - \frac{288a_1^2\bar{x}}{l^3} - \frac{576a_1a_3\bar{x}}{l} + 36a_3^2l^2 \right. \quad (3.64)$$

$$\left. - 144a_3^2l\bar{x} - \frac{288a_1^2\bar{x}}{l^3} + \frac{576a_1^2\bar{x}^2}{l^4} - \frac{576a_1a_3\bar{x}^2}{l^2} + 144a_3^2\bar{x}^2 \right) dx \quad (3.65)$$

$$\Pi_2 = EI_2 \text{Big} \left(\frac{12a_1^2}{l} + 12a_1a_3l + 3a_3^2l^3 \right). \quad (3.66)$$

Então, o funcional resolvido é igual a:

$$\Pi = \frac{3a_3^2 l^3 EI_1}{4} + EI_2 \left(\frac{12a_1^2}{l} + 12a_1a_3l + 3a_3^2l^3 \right) - \frac{Pl}{2} \left(a_1 + \frac{l^2 a_3}{4} \right). \quad (3.67)$$

Pode-se notar que a equação depende apenas dos termos a_1 e a_3 , para descobrir os seus respectivos valores, deriva-se Π em relação a a_1 :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = \left(\frac{24a_1}{l} + 12a_3l \right) EI_2 - \frac{Pl}{2} = 0 \quad (3.68)$$

$$\frac{24a_1}{l} + 12a_3l = \frac{Pl}{2EI_2}. \quad (3.69)$$

Posteriormente, deriva-se em relação a a_3

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_3} = \left(\frac{6a_3 l^3}{4} \right) EI_1 + (12a_1l + 6a_3l^3) EI_2 - \frac{Pl^3}{8} = 0, \quad (3.70)$$

ou ainda,

$$\left(\frac{6a_3l^3}{4}\right)EI_1 + (12a_1l + 6a_3l^3)EI_2 = \frac{Pl^3}{8}. \quad (3.71)$$

Resolvendo o sistema de equações obtido no passo anterior, os valores encontrados para a_1 e a_3 são:

$$a_1 = \frac{Pl^2}{48E} \left(\frac{1}{I_2} + \frac{2}{I_1} \right) \quad e \quad a_3 = -\frac{P}{12EI_1}. \quad (3.72)$$

Dessa forma, pode-se concluir que os valores para b_i são:

$$b_0 = \frac{Pl^3}{96E} \left(\frac{1}{I_2} + \frac{1}{I_1} \right), \quad b_1 = \frac{Pl^2}{48E} \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1} \right),$$

$$b_2 = -\frac{Pl}{8EI_2} \quad e \quad b_3 = \frac{P}{12EI_2}. \quad (3.73)$$

Pode-se, então, escrever as funções aproximadoras $v_1(x)$ e $v_2(\bar{x})$, que representam a deflexão no eixo da viga, como:

$$v_1(x) = \frac{P}{48E} \left[\left(\frac{1}{I_2} + \frac{2}{I_1} \right) l^2 x - \frac{4x^3}{I_1} \right] \quad (3.74)$$

$$v_2(\bar{x}) = \frac{P}{96EI_2} \left[8\bar{x}^3 - 12l\bar{x}^2 + 2 \left(1 - \frac{I_2}{I_1} \right) l^2 \bar{x} + \left(1 + \frac{I_2}{I_1} l^3 \right) \right], \quad (3.75)$$

onde x é o ponto no eixo da viga em que se quer encontrar a deflexão. Assumindo que $I_1 = I_2 = I$, então:

$$v_1(x) = \frac{P}{48EI} (-4x^3 + 3l^2x) \quad (3.76)$$

$$v_2(\bar{x}) = \frac{P}{96EI} (8\bar{x}^3 - 12l\bar{x}^2 + 2l^3). \quad (3.77)$$

Como havia sido dito anteriormente, $v_1(\frac{l}{2}) = v_2(0)$, sendo assim a deflexão no ponto B é:

$$v_1\left(\frac{l}{2}\right) = v_2(0) = \frac{Pl^3}{48EI}, \quad (3.78)$$

que é o valor exato da deflexão nesse ponto.

3.3 Método de Galerkin

No método de Galerkin, não é necessário a existência de um funcional, utiliza-se diretamente a Equação Diferencial que descreve o problema. Como já diz o nome, a função aproximadora não é a solução exata da equação diferencial, por isso existe um ou mais resíduos que devem ser ponderados através de Funções Ponderadoras.

O método preza pela condição de ortogonalidade, que determina que o produto entre a função residual e a função ponderadora deve ser, supostamente, igual a zero no domínio de integração.

Levando em consideração o sistema de equações lineares da forma:

$$Lv = f \quad (3.79)$$

L : operador;

v : função que satisfaz certas condições de contorno.

Supondo uma função aproximadora \bar{v} :

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^n a_i \phi_i \quad (3.80)$$

ϕ_i : função que satisfaz as condições de contorno.

Substituindo v por \bar{v} , há um erro dado por:

$$\epsilon = L\bar{v} - f \quad (3.81)$$

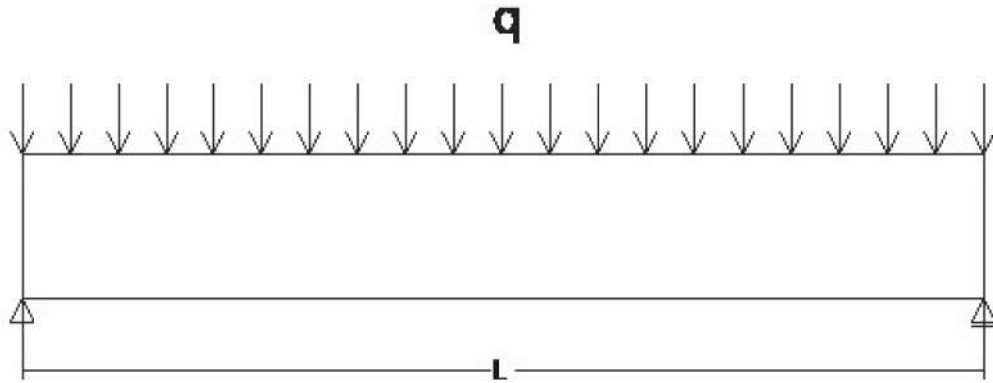
Levando em consideração os conceitos de ortogonalidade, podemos escrever:

$$\int_V (L\bar{v} - f) \phi_i dV = 0 \quad (3.82)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

Tomando como exemplo a viga da figura a seguir:

Figura 4 - Viga prismática



Fonte: Próprio autor, 2018.

O funcional que representa a energia potencial total da viga é

$$\Pi = \int_0^l \frac{EI}{2} [v''(x)]^2 dx + \int_0^l qv(x) dx. \quad (3.83)$$

Calcula-se a variação no funcional, aplicando a equação de Euler-Lagrange, para encontrar a equação diferencial de equilíbrio da viga, que é dada por:

$$EIv^{IV} - q = 0. \quad (3.84)$$

Para resolver o problema, admite-se como função aproximadora a seguinte série de Fourier:

$$\bar{v}(x) = a_1 \text{sen}\left(\frac{\pi x}{l}\right) + a_2 \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{l}\right) + a_3 \text{sen}\left(\frac{3\pi x}{l}\right) + a_4 \text{sen}\left(\frac{4\pi x}{l}\right). \quad (3.85)$$

Satisfazendo as condições de contorno:

$$\bar{v}(0) = a_1 \text{sen}\left(\frac{\pi 0}{l}\right) + a_2 \text{sen}\left(\frac{2\pi 0}{l}\right) + a_3 \text{sen}\left(\frac{3\pi 0}{l}\right) + a_4 \text{sen}\left(\frac{4\pi 0}{l}\right) = 0, \quad (3.86)$$

$$\bar{v}(l) = a_1 \text{sen}\left(\frac{\pi l}{l}\right) + a_2 \text{sen}\left(\frac{2\pi l}{l}\right) + a_3 \text{sen}\left(\frac{3\pi l}{l}\right) + a_4 \text{sen}\left(\frac{4\pi l}{l}\right) = 0. \quad (3.87)$$

Derivando até a quarta ordem:

$$\bar{v}'(x) = \frac{a_1 \pi}{l} \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) + \frac{2a_2 \pi}{l} \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right) + \frac{3a_3 \pi}{l} \cos\left(\frac{3\pi x}{l}\right) + \frac{4a_4 \pi}{l} \cos\left(\frac{4\pi x}{l}\right), \quad (3.88)$$

$$\bar{v}''(x) = -\frac{a_1\pi^2}{l^2}\text{sen}\left(\frac{\pi x}{l}\right) - \frac{4a_2\pi^2}{l^2}\text{sen}\left(\frac{2\pi x}{l}\right) - \frac{9a_3\pi^2}{l^2}\text{sen}\left(\frac{3\pi x}{l}\right) - \frac{16a_4\pi^2}{l^2}\text{sen}\left(\frac{4\pi x}{l}\right) \quad (3.89)$$

$$\bar{v}'''(x) = -\frac{a_1\pi^3}{l^3}\cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) - \frac{8a_2\pi^3}{l^3}\cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right) - \frac{27a_3\pi^3}{l^3}\cos\left(\frac{3\pi x}{l}\right) - \frac{64a_4\pi^3}{l^3}\cos\left(\frac{4\pi x}{l}\right) \quad (3.90)$$

$$\bar{v}^{IV}(x) = \frac{\pi^4}{l^4} \left[a_1\text{sen}\left(\frac{\pi x}{l}\right) + 16a_2\text{sen}\left(\frac{2\pi x}{l}\right) + 81a_3\text{sen}\left(\frac{3\pi x}{l}\right) + 256a_4\text{sen}\left(\frac{4\pi x}{l}\right) \right] \quad (3.91)$$

Pode-se dizer que os coeficientes ϕ_i são iguais a:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \text{sen}\left(\frac{\pi x}{l}\right), \quad \phi_2 = \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{l}\right), \\ \phi_3 &= \text{sen}\left(\frac{3\pi x}{l}\right) \quad e \quad \phi_4 = \text{sen}\left(\frac{4\pi x}{l}\right). \end{aligned} \quad (3.92)$$

Da relação de ortogonalidade, conforme o Método de Galerkin, tem-se:

$$\int_0^l [EI\bar{v}^{IV}(x) - q]\phi_i dx = 0 \quad (3.93)$$

$i = 1, 2, 3, 4$. Para relembrar os conceitos de ortogonalidade, considere a integral a seguir

$$\int_0^l \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx. \quad (3.94)$$

Para $m \neq n$:

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \text{sen}(a)\text{sen}(b) \quad (3.95)$$

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \text{sen}(a)\text{sen}(b), \quad (3.96)$$

subtraindo as duas funções anteriores, tem-se:

$$\cos(a - b) - \cos(a + b) = 2\text{sen}(a)\text{sen}(b) \quad (3.97)$$

$$\text{sen}(a)\text{sen}(b) = \frac{1}{2}[\cos(a - b) - \cos(a + b)]. \quad (3.98)$$

Substituindo na integral, obtem-se:

$$\frac{1}{2} \int_0^l \left[\cos\frac{\pi x}{l}(m - n) - \cos\frac{\pi x}{l}(m + n) \right] dx, \quad (3.99)$$

resolvendo, então, a integral

$$\frac{1}{2} \left[\frac{l}{\pi(m-n)} \operatorname{sen} \pi(m-n) - \frac{l}{\pi(m+n)} \operatorname{sen} \pi(m+n) \right] = 0. \quad (3.100)$$

Generalizando, para $m \neq n$:

$$\int_0^l \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{l} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right) dx = 0; \quad (3.101)$$

$$\int_0^l \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{l} \right) \cos \left(\frac{n\pi x}{l} \right) dx = 0; \quad (3.102)$$

$$\int_0^l \cos \left(\frac{m\pi x}{l} \right) \cos \left(\frac{n\pi x}{l} \right) dx = 0. \quad (3.103)$$

Para o caso $m = n$, pode-se simplificar a integral como

$$\int_0^l \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{l} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right) dx = \int_0^l \operatorname{sen}^2 \left(\frac{m\pi x}{l} \right), \quad (3.104)$$

lembrando que:

$$\cos^2 \theta = 1 - \operatorname{sen}^2 \theta \quad e \quad (3.105)$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta, \quad (3.106)$$

então,

$$\cos(2\theta) = 1 - \operatorname{sen}^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta \quad \therefore \quad \operatorname{sen}^2 \theta = \frac{1}{2} [1 - \cos(2\theta)]. \quad (3.107)$$

Substituindo na integral, fica:

$$\int_0^l \left[\frac{1}{2} - \frac{\cos \left(\frac{2m\pi x}{l} \right)}{2} \right] dx, \quad (3.108)$$

resolvendo a integral, obtem-se:

$$\frac{l}{2} - \frac{1}{2} \frac{l}{2m\pi} \operatorname{sen}(2m\pi) = \frac{l}{2}. \quad (3.109)$$

Generalizando, para $m = n$:

$$\int_0^l \operatorname{sen}^2 \left(\frac{m\pi x}{l} \right) = \frac{l}{2}; \quad (3.110)$$

$$\int_0^l \cos^2 \left(\frac{m\pi x}{l} \right) = \frac{l}{2}. \quad (3.111)$$

Voltando para a viga do exemplo, substituindo \bar{x}^{IV} na integral e resolvendo para $\phi_1 = \text{sen}\left(\frac{\pi x}{l}\right)$, tem-se:

$$\int_0^l \left(\frac{EI\pi^4}{l^4} \text{sen} \frac{\pi x}{l} \right) \left[a_1 \text{sen}\left(\frac{\pi x}{l}\right) + 16a_2 \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{l}\right) + 81a_3 \text{sen}\left(\frac{3\pi x}{l}\right) \right. \quad (3.112)$$

$$\left. + 256a_4 \text{sen}\left(\frac{4\pi x}{l}\right) \right] dx - \int_0^l q \text{sen}\left(\frac{\pi x}{l}\right) dx = 0, \quad (3.113)$$

então,

$$a_1 = \frac{4ql^4}{EI\pi^5}. \quad (3.114)$$

Para $\phi_2 = \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{l}\right)$, tem-se:

$$\int_0^l \left(\frac{EI\pi^4}{l^4} \text{sen} \frac{2\pi x}{l} \right) \left[a_1 \text{sen}\left(\frac{\pi x}{l}\right) + 16a_2 \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{l}\right) + 81a_3 \text{sen}\left(\frac{3\pi x}{l}\right) \right] dx \quad (3.115)$$

$$+ 256a_4 \text{sen}\left(\frac{4\pi x}{l}\right) \right] dx - \int_0^l q \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{l}\right) dx = 0, \quad (3.116)$$

dessa forma,

$$a_2 = 0. \quad (3.117)$$

Para $\phi_3 = \text{sen}\left(\frac{3\pi x}{l}\right)$, obtem-se:

$$\int_0^l \left(\frac{EI\pi^4}{l^4} \text{sen} \frac{3\pi x}{l} \right) \left[a_1 \text{sen}\left(\frac{\pi x}{l}\right) + 16a_2 \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{l}\right) + 81a_3 \text{sen}\left(\frac{3\pi x}{l}\right) \right] dx \quad (3.118)$$

$$+ 256a_4 \text{sen}\left(\frac{4\pi x}{l}\right) \right] dx - \int_0^l q \text{sen}\left(\frac{3\pi x}{l}\right) dx = 0, \quad (3.119)$$

sendo assim,

$$a_3 = \frac{4ql^4}{243EI\pi^5}. \quad (3.120)$$

Por último, para $\phi_4 = \text{sen}\left(\frac{4\pi x}{l}\right)$, obtem-se:

$$\int_0^l \left(\frac{EI\pi^4}{l^4} \text{sen} \frac{4\pi x}{l} \right) \left[a_1 \text{sen}\left(\frac{\pi x}{l}\right) + 16a_2 \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{l}\right) + 81a_3 \text{sen}\left(\frac{3\pi x}{l}\right) \right] dx \quad (3.121)$$

$$+ 256a_4 \text{sen}\left(\frac{4\pi x}{l}\right) \right] dx - \int_0^l q \text{sen}\left(\frac{4\pi x}{l}\right) dx = 0, \quad (3.122)$$

logo,

$$a_4 = 0. \quad (3.123)$$

Sendo assim, a função aproximadora pode ser reescrita como

$$\bar{v}(x) = \frac{4ql^4}{EI\pi^5} \text{sen}\left(\frac{\pi x}{l}\right) + \frac{4ql^4}{243EI\pi^5} \text{sen}\left(\frac{3\pi x}{l}\right). \quad (3.124)$$

Para $x = \frac{l}{2}$, a deflexão é igual a:

$$\bar{v}\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{4ql^4}{EI\pi^5} \text{sen}\left(\frac{\pi l}{2l}\right) + \frac{4ql^4}{243EI\pi^5} \text{sen}\left(\frac{3\pi l}{2l}\right) \quad (3.125)$$

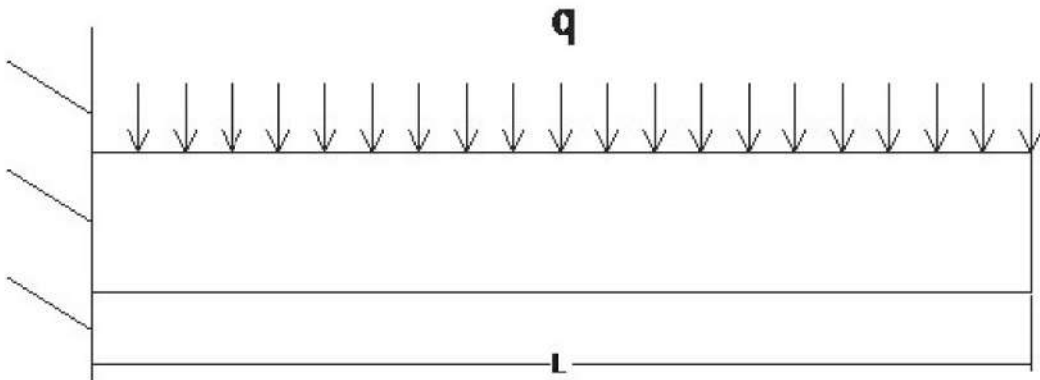
$$\bar{v}\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{ql^4}{76,8210EI}, \quad (3.126)$$

sendo que o resultado exato é $\frac{ql^4}{76,8EI}$. Ou seja, a solução encontrada é bem próxima da solução exata.

3.4 Introdução ao Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é baseado nos Métodos de Rayleigh-Ritz e Galerkin, por esse motivo será adotada a viga em balanço a seguir, resolvendo pelo Método de Rayleigh-Ritz para chegar à formulação geral do MEF:

Figura 5 - Viga prismática em balanço



Fonte: Próprio autor, 2018.

Novamente adota-se a seguinte função aproximadora para representar a deflexão:

$$v(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3. \quad (3.127)$$

As condições de contorno a serem satisfeitas nesse problema, são:

$$v(0) = 0, \quad (3.128)$$

dessa forma,

$$a_1 + a_2 0 + a_3 0^2 + a_4 0^3 = 0 \quad \therefore \quad a_1 = 0 ; \quad (3.129)$$

$$v'(0) = 0, \quad (3.130)$$

então,

$$a_2 + 2a_3 x + 3a_4 x^2 = 0 \quad \therefore \quad a_2 = 0. \quad (3.131)$$

Sendo assim, a função aproximadora pode ser escrita da forma

$$v(x) = a_3 x^2 + a_4 x^3. \quad (3.132)$$

Sabe-se que $v(l) = -f$ e $v'(l) = -\theta$, sendo f a deflexão e θ a rotação na extremidade livre da viga, resultando o seguinte sistema de equações

$$a_3 l^2 + a_4 l^3 = -f \quad (3.133)$$

$$2a_3 l + 3a_4 l^2 = -\theta. \quad (3.134)$$

Resolvendo o sistema de equações:

$$a_3 = \frac{-f}{l} - a_4 l \quad (3.135)$$

$$a_4 = \frac{-\theta - 2a_3 l}{3l^2}, \quad (3.136)$$

obtem-se

$$a_3 = \frac{\theta}{l} - \frac{3f}{l^2} \quad e \quad a_4 = -\frac{\theta}{l^2} + \frac{2f}{l^3}. \quad (3.137)$$

Dessa forma, $v(x)$ é

$$v(x) = \left(\frac{\theta}{l} - \frac{3f}{l^2} \right) x^2 + \left(-\frac{\theta}{l^2} + \frac{2f}{l^3} \right) x^3, \quad (3.138)$$

$v(x)$ pode ser escrita em função das incógnitas as quais se quer encontrar no problema, f e θ

$$v(x) = \left(\frac{-3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} \right) f + \left(\frac{x^2}{l^2} - \frac{x^3}{l^3} \right) \theta l. \quad (3.139)$$

Considerando uma coordenada adimensional ξ que é igual a $\frac{x}{l}$, a função pode ser, então, escrita em função de ξ

$$v(\xi) = (2\xi^3 - 3\xi^2)f + (\xi^2 - \xi^3)\theta l. \quad (3.140)$$

O funcional que representa a Energia Potencial na viga deve ser reescrito em função de ξ :

$$\Pi = \int_0^l \frac{EI}{2} [v''(x)]^2 dx + \int_0^l qv(x) dx, \quad (3.141)$$

$$\Pi = \frac{1}{2l^3} \int_0^1 EI [v''(\xi)]^2 d\xi - l \int_0^1 qv(\xi) d\xi. \quad (3.142)$$

Para resolver no funcional, o primeiro passo é derivar a função aproximadora duas vezes em relação a ξ

$$v'(\xi) = 6\xi^2 f - 6\xi f + 2\xi \theta l - 3\xi^2 \theta l, \quad (3.143)$$

$$v''(\xi) = 12\xi f - 6f + 2\theta l - 6\xi \theta l. \quad (3.144)$$

Substituindo no funcional:

$$\Pi = \frac{1}{2l^3} \int_0^1 EI (12\xi f - 6f + 2\theta l - 6\xi \theta l)^2 d\xi - l \int_0^1 q(2\xi^3 - 3\xi^2)f + (\xi^2 - \xi^3)\theta l d\xi \quad (3.145)$$

Resolver esse funcional implica em resolver um produto notável de muitos termos, e quanto mais termos compuserem a função aproximadora, mais complexo fica o cálculo. O produto notável contido no funcional acima, resolvido, equivale:

$$144\xi^2 f^2 - 144\xi f^2 + 48\xi f \theta l - 144\xi^2 f \theta l + 36f^2 \quad (3.146)$$

$$-24f \theta l + 72\xi f \theta l + 4\theta^2 l^2 - 24\xi \theta^2 l^2 + 36\xi^2 \theta^2 l^2. \quad (3.147)$$

Resolvendo o funcional, chega-se ao seguinte resultado:

$$\Pi = \frac{EI}{2l^3} (-12f \theta l + 12f^2 + 4\theta^2 l^2) - l q \left(\frac{-f}{2} + \frac{\theta l}{12} \right). \quad (3.148)$$

Para descobrir os valores de f e θ , deriva-se Π em função dos mesmos:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial f} = \frac{EI}{l^3}(-6\theta l + 12f) + \frac{ql}{2} = 0; \quad (3.149)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = \frac{EI}{l^2}(-6f + 4\theta l) - \frac{ql^2}{12} = 0, \quad (3.150)$$

gerando o sistema de equações:

$$f = \frac{-ql^4}{24EI} + \frac{\theta l}{2} \quad (3.151)$$

$$\theta = \frac{ql^3}{48EI} + \frac{6f}{4l}. \quad (3.152)$$

Conclui-se, então, que:

$$f = \frac{-ql^4}{8EI} \quad e \quad \theta = \frac{-ql^3}{6EI}. \quad (3.153)$$

Considerando que a deflexão e rotação na extremidade engastada sejam representadas, respectivamente, por V_1 e θ_1 , e na extremidade livre por V_2 e θ_2 , a função aproximadora pode ser escrita como:

$$v(\xi) = \phi_1(\xi)V_1 + \phi_2(\xi)\theta_1 + \phi_3(\xi)V_2 + \phi_4(\xi)\theta_2. \quad (3.154)$$

Assumindo que V_2 e θ_2 sejam positivos, pode-se dizer que ϕ_1 e ϕ_2 têm sinais contrários aos calculados anteriormente, e são iguais a:

$$\phi_3 = 3\xi^2 - 2\xi^3 \quad e \quad \phi_4 = (\xi^3 - \xi^2)l. \quad (3.155)$$

Como V_1 e θ_1 são iguais a 0, as funções ϕ_1 e ϕ_2 não podem ser determinadas. Mas deixando para impor as condições de contorno mais para frente, é possível determinar os valores de ϕ_1 e ϕ_2 , considerando valores não nulos para V_1 e θ_1 . Sendo assim:

$$v(0) = V_1 \quad \therefore \quad a_1 = V_1; \quad (3.156)$$

$$v'(0) = \theta_1 \quad \therefore \quad a_2 = \theta_1; \quad (3.157)$$

$$v(l) = V_2 \quad \therefore \quad V_2 = V_1 + \theta_1 l + a_3 l^2 + a_4 l^3; \quad (3.158)$$

$$v'(l) = \theta_2 \quad \therefore \quad \theta_2 = \theta_1 + 2a_3l + 3a_4l^2. \quad (3.159)$$

Resolvendo o sistema, é possível obter os valores de a_3 e a_4 :

$$a_3 = \frac{3(V_2 - V_1)}{l^2} - \frac{(\theta_2 + 2\theta_1)}{l}, \quad (3.160)$$

$$a_4 = \frac{2(V_1 - V_2)}{l^3} + \frac{\theta_2 + \theta_1}{l^2}. \quad (3.161)$$

Reescrevendo a função aproximadora:

$$v(x) = V_1 + \theta_1 x + \frac{3x^2 V_2}{l^2} - \frac{3x^2 V_1}{l^2} - \frac{\theta_2 x^2}{l} \quad (3.162)$$

$$- \frac{2\theta_1 x^2}{l} + \frac{2x^3 V_1}{l^3} - \frac{2x^3 V_2}{l^3} + \frac{\theta_2 x^3}{l^2} + \frac{\theta_1 x^3}{l^2}. \quad (3.163)$$

Considerando a coordenada adimensional $\xi = \frac{x}{l}$, a função aproximadora fica:

$$v(\xi) = (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)V_1 + (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)l\theta_1 \quad (3.164)$$

$$+ (3\xi^2 - 2\xi^3)V_2 + (-\xi^2 + \xi^3)l\theta_2, \quad (3.165)$$

sendo assim, pode-se dizer que:

$$\phi_1 = (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3); \quad \phi_2 = (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)l; \quad (3.166)$$

$$\phi_3 = (3\xi^2 - 2\xi^3) \quad e \quad \phi_4 = (-\xi^2 + \xi^3)l. \quad (3.167)$$

A função aproximadora pode ser expressa matricialmente como:

$$v(\xi) = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \phi v.$$

Derivando duas vezes a função aproximadora, obtém-se:

$$v'(\xi) = (-6\xi + 6\xi^2)V_1 + (1 - 4\xi + 3\xi^2)l\theta_1 + (6\xi - 6\xi^2)V_2 + (3\xi^2 - 2\xi)l\theta_2, \quad (3.168)$$

$$v''(\xi) = (-6 + 12\xi)V_1 + (4 + 6\xi)l\theta_1 + (6 - 12\xi)V_2 + (6\xi - 2)l\theta_2. \quad (3.169)$$

Generalizando,

$$v''(\xi) = Bv. \quad (3.170)$$

Para substituir no funcional que representa a energia potencial total da viga, é necessário elevar a derivada de segunda ordem da função $v(\xi)$ ao quadrado. Isso implica resolver um produto notável que resultará em 64 termos, sendo inviável de se resolver manualmente. Por esse motivo foi utilizado o software Maple para obter esse resultado. O funcional resolvido é igual a:

$$\Pi = (6V_1^2 + 6lV_1\theta_1 - 12V_1V_2 + 6lV_1\theta_2 + 2l^2\theta_1^2 - 6l\theta_1V_2 + 2l^2\theta_1\theta_2) \quad (3.171)$$

$$+ 6V_2^2 - 6lV_2\theta_2 + 2l^2\theta_2^2) \frac{EI}{l^3} - ql \left(\frac{V_1}{2} + \frac{l\theta_1}{12} + \frac{V_2}{2} - \frac{l\theta_2}{12} \right). \quad (3.172)$$

Derivando em função de V_1 , θ_1 , V_2 e θ_2 , resulta em um sistema de 4 equações:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial V_1} = (12V_1 + 6l\theta_1 - 12V_2 + 6l\theta_2) \frac{EI}{l^3} - \frac{ql}{2} = 0 \quad (3.173)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_1} = (6lV_1 + 4l^2\theta_1 - 6lV_2 + 2l^2\theta_2) \frac{EI}{l^3} - \frac{ql^2}{12} = 0 \quad (3.174)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial V_2} = (-12V_1 - 6l\theta_1 + 12V_2 - 6l\theta_2) \frac{EI}{l^3} - \frac{ql}{2} = 0 \quad (3.175)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_2} = (6lV_1 + 2l^2\theta_1 - 6lV_2 + 4l^2\theta_2) \frac{EI}{l^3} + \frac{ql^2}{12} = 0. \quad (3.176)$$

O sistema anterior pode ser escrito em forma de matriz, como:

$$\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = ql \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{l}{12} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{-l}{12} \end{bmatrix}.$$

Nota-se que a matriz quadrada é simétrica, resultado dos teoremas de reciprocidade de Betti ou Maxwell.

Agora são impostas as condições de contorno, assumindo os valores $V_1 = \theta_1 = 0$. As equações se reduzem a:

$$\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l \\ -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = ql \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-l}{12} \end{bmatrix}.$$

Simplificando o sistema, tem-se:

$$V_2 = \frac{ql^4}{24EI} + \frac{l\theta_2}{2} \quad (3.177)$$

$$\theta_2 = -\frac{ql^3}{48EI} + \frac{3V_2}{2l}, \quad (3.178)$$

que resulta em:

$$V_2 = \frac{ql^4}{8EI} \quad e \quad \theta_2 = \frac{ql^3}{(6EI)}, \quad (3.179)$$

que por sua vez, são os valores anteriormente determinados para f e θ , porém com sinais contrários pois foi definido que os mesmos eram positivos, não negativos. Outra forma de escrever a matriz do sistema de equações é

$$\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & -6l \\ 0 & 0 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = ql \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{-l}{12} \end{bmatrix},$$

uma forma mais adequada de se obter o sistema de equações.

Sabe-se que o funcional que representa a energia potencial total na viga é:

$$\Pi = \frac{1}{2l^3} \int_0^1 [v''(\xi)] EI [v''(\xi)] d\xi - \int_0^1 qlv(\xi) d\xi. \quad (3.180)$$

A fórmula geral para $v(\xi)$ e $v''(\xi)$ foi vista anteriormente, sendo assim, pode-se reescrever o funcional como:

$$\Pi = \frac{1}{2l^3} \int_0^1 (Bv)^T EI (Bv) d\xi - l \int_0^1 q\phi v d\xi, \quad (3.181)$$

ou ainda,

$$\Pi = v^T \left[\frac{1}{2l^3} \int_0^1 B^T (EI) B d\xi \right] v - l \int_0^1 q\phi v d\xi. \quad (3.182)$$

Fazendo a variação no funcional, tem-se:

$$\delta\Pi = \delta v^T \left[\frac{1}{l^3} \int_0^1 B^T (EI) B d\xi \right] v - \delta v^T l \int_0^1 q\phi^T d\xi = 0, \quad (3.183)$$

como δv^T é arbitrário, resulta:

$$\left[\frac{1}{l^3} \int_0^1 B^T (EI) B d\xi \right] v - l \int_0^1 q\phi^T d\xi = 0, \quad (3.184)$$

sendo que o termo que está entre colchetes é chamado de matriz de rigidez, dada por:

$$k = \frac{1}{l^3} \int_0^1 B^T (EI) B d\xi. \quad (3.185)$$

O segundo termo da equação é denominado vetor de cargas nodais equivalentes, dado por:

$$r = l \int_0^1 q \phi^T d\xi. \quad (3.186)$$

A equação pode, então, ser escrita como:

$$kv = r, \quad (3.187)$$

que é a base para a formulação utilizada no Método dos Elementos Finitos.

Capítulo 4

Metodologia

O presente trabalho busca realizar uma análise estrutural de um elemento da construção civil. Tal análise parte da comparação das soluções obtidas para a deflexão máxima a partir do Método de Rayleigh-Ritz e do Método de Galerkin. Para realizar a comparação dos métodos foi considerada uma viga biapoiada sujeita a uma carga distribuída ao longo de seu eixo.

A comparação teve como base as soluções geradas por funções aproximadas polinomiais e trigonométricas, para ambos os métodos, a fim de conferir a equivalência dos mesmos, além da convergência para a solução exata do problema.

Para a escolha do elemento estrutural, devido à dificuldade de se calcular elementos com variadas dimensões, foi priorizada a seleção um elemento unidimensional. Mesmo assim, em certo ponto as equações geradas se tornam muito complexas para serem resolvidas manualmente, por isso foi utilizado o software Maple para auxiliar na resolução das equações.

Para a elaboração deste trabalho, foi necessário aprender os respectivos métodos utilizados, assim como sua aplicabilidade na Engenharia Civil. Ainda, foi necessário aprender a programar textos em formato Latex por meio do software Texmaker e a programar equações no software Maple.

O software Maple é um sistema computacional desenvolvido pela companhia canadense Maplesoft, que consiste em resolver e equações algébricas, podendo também criar gráficos em duas ou três dimensões. Pode ser comparado com uma calculadora gráfica, porém mais eficaz, aplicável em praticamente todos os ramos da matemática.

Esse trabalho foi produzido em Latex por meio do software Texmaker, uma

plataforma de programação de textos, muito utilizado na área de exatas pois possui a vantagem de editar fórmulas matemáticas com uma excelente formatação.

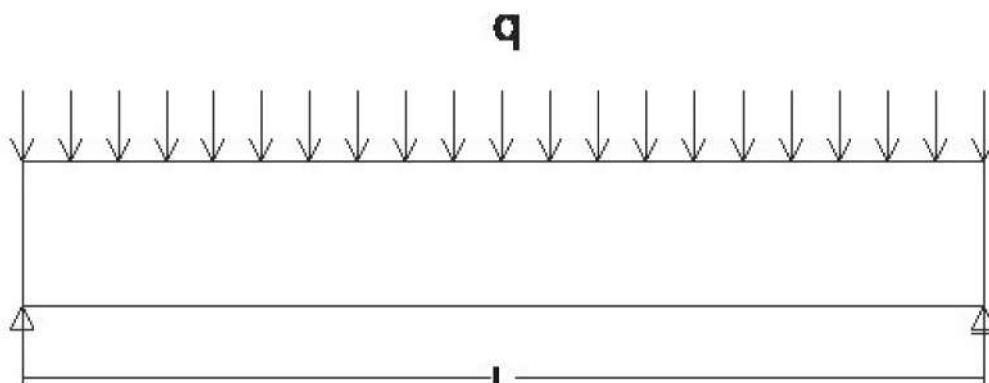
Capítulo 5

Apresentação e Análise de Resultados

Esse trabalho tem como objetivo comparar os métodos de Rayleigh-Ritz e Galerkin, admitindo funções aproximadoras polinomiais e trigonométricas para ambos os métodos, e também variando a quantidade de termos dessas funções. A comparação será feita quanto à convergência da solução para a solução exata, e quanto à equivalência dos métodos e funções.

Para atingir os resultados, essa é a viga a ser analisada:

Figura 6 - Viga prismática



Fonte: Próprio autor, 2018.

Sabe-se que a deflexão máxima para a viga em análise se dá no ponto $x = \frac{l}{2}$ e que a solução exata é

$$v\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5ql^4}{384EI} = \frac{ql^4}{76,8EI}, \quad (5.1)$$

sendo E o módulo de elasticidade e I a inércia da viga. O domínio de integração para a viga em análise varia de 0 a l, que corresponde ao tamanho real da viga. Sabe-se,

também, que o funcional que representa a Energia Potencial Total da viga é

$$\Pi = \int_0^l \frac{EI}{2} [v''(x)]^2 dx + \int_0^l qv(x) dx \quad (5.2)$$

e que a equação diferencial de equilíbrio da viga é

$$EIv^{IV} - q = 0. \quad (5.3)$$

Primeiramente, será analisada resolvendo pelo Método de Rayleigh-Ritz, considerando as funções aproximadoras polinomiais.

As condições de contorno que devem ser satisfeitas para todas as funções aproximadoras a serem analisadas são:

$$v(0) = 0 \quad e \quad v(l) = 0. \quad (5.4)$$

Admitindo a primeira função aproximadora, que representa a deflexão na viga, sendo

$$v_1(x) = a_1 + a_2x, \quad (5.5)$$

impondo as condições de contorno, tem-se:

$$a_1 = 0 \quad e \quad a_2 = 0, \quad (5.6)$$

dessa forma, a função aproximadora resultará sempre em 0.

Considera-se, então, uma nova função aproximadora:

$$v_2(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2, \quad (5.7)$$

impondo as condições de contorno, tem-se:

$$a_1 = 0 \quad e \quad a_2 = -a_3l. \quad (5.8)$$

Substituindo e resolvendo o funcional, conclui-se que

$$a_3 = -\frac{ql^2}{24EI}. \quad (5.9)$$

A função $v_2(x)$ passa a ter a forma:

$$v_2(x) = -\frac{ql^2}{24EI}(x^2 - lx), \quad (5.10)$$

a função aproximadora depende agora somente de x , sendo x um ponto ao longo do eixo da viga. A deflexão máxima para essa função é dada por:

$$v_2\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{ql^4}{96EI}. \quad (5.11)$$

A partir de agora, algumas etapas dos cálculos serão omitidas pois foram realizados por meio do software Maple, mas essas etapas podem ser encontradas nas imagens do apêndice.

A próxima função aproximadora a ser analisada é

$$v_3(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3, \quad (5.12)$$

resolvendo o funcional, conclui-se que os termos a_i têm valores iguais a:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0; \quad a_2 = \frac{ql^3}{24EI}; \\ a_3 &= \frac{-ql^2}{24EI} \quad e \quad a_4 = 0, \end{aligned} \quad (5.13)$$

então, a função aproximadora $v_3(x)$ tem a forma:

$$v_3(x) = -\frac{ql^2}{24EI}(x^2 - lx), \quad (5.14)$$

que é igual a função $v_2(x)$. A deflexão máxima para essa função também será a mesma encontrada para a função anterior,

$$v_3\left(\frac{l}{2}\right) = v_2\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{ql^4}{96EI}. \quad (5.15)$$

A quarta função a ser considerada é

$$v_4(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + a_5x^4, \quad (5.16)$$

a resolução do funcional resulta nos valores de a_i

$$\begin{aligned} a_1 &= 0; \quad a_2 = \frac{ql^3}{24EI}; \quad a_3 = 0; \\ a_4 &= \frac{-ql}{12EI} \quad e \quad a_5 = \frac{q}{24EI} \end{aligned} \quad (5.17)$$

então, a função $v_4(x)$ é

$$v_4(x) = \frac{q}{24EI}(l^3x - lx^3 + x^4) \quad (5.18)$$

e para o valor de $x = \frac{l}{2}$, a deflexão máxima é

$$v_4\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5ql^4}{384EI} = \frac{ql^4}{76,8EI}, \quad (5.19)$$

que é a solução exata.

A quinta função considerada é

$$v_5(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + a_5x^4 + a_6x^5, \quad (5.20)$$

resolvendo o funcional, os valores obtidos de a_i são:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 ; \quad a_2 = \frac{ql^3}{24EI} ; \quad a_3 = 0 ; \\ a_4 &= \frac{-ql}{12EI} ; \quad a_5 = \frac{q}{24EI} \quad e \quad a_6 = 0, \end{aligned} \quad (5.21)$$

resultando em uma função $v_5(x)$ igual a função $v_4(x)$

$$v_5(x) = v_4(x) = \frac{q}{24EI}(l^3x - lx^3 + x^4), \quad (5.22)$$

sendo a deflexão máxima, para o ponto $\frac{l}{2}$, igual a:

$$v_5\left(\frac{l}{2}\right) = v_4\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{ql^4}{76,8EI} \quad (5.23)$$

que também é a solução exata.

Admitindo uma sexta função aproximadora da forma

$$v_6(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + a_5x^4 + a_6x^5 + a_7x^6, \quad (5.24)$$

a resolução do funcional resulta nos valores de a_i

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 ; \quad a_2 = \frac{ql^3}{24EI} ; \quad a_3 = 0 ; \\ a_4 &= \frac{-ql}{12EI} ; \quad a_5 = \frac{q}{24EI} ; \quad a_6 = 0 \\ e \quad a_7 &= 0, \end{aligned} \quad (5.25)$$

sendo assim, a função aproximadora $v_6(x)$ pode ser reescrita como

$$v_6(x) = \frac{q}{24EI}(l^3x - lx^3 + x^4), \quad (5.26)$$

que é exatamente igual a função encontrada anteriormente para $v_4(x)$ e $v_5(x)$. Conclui-se então que a deflexão máxima para o ponto $x = \frac{l}{2}$ também é a mesma

$$v_6\left(\frac{l}{2}\right) = v_5\left(\frac{l}{2}\right) = v_4\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5ql^4}{384EI} = \frac{ql^4}{76,8EI}. \quad (5.27)$$

A partir das análises dessas 6 funções aproximadoras, é possível concluir que a partir do momento que se encontra a função que corresponde à solução exata, mesmo que se acrescente mais termos, a função e a solução acabam sendo sempre as mesmas.

Agora será resolvido o mesmo problema, ainda pelo Método de Rayleigh-Ritz, mas utilizando funções aproximadoras trigonométricas. Para esse caso, não são consideradas as condições de contorno vistas anteriormente, pois resultam sempre em $0 = 0$.

A primeira função considerada será:

$$u_1(x) = a_1 \text{sen}\left(\frac{\pi x}{l}\right) + a_2 \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{l}\right), \quad (5.28)$$

resolvendo o funcional pelo método, obtém-se os seguintes valores para a_i :

$$a_1 = \frac{4ql^4}{EI\pi^5} \quad e \quad a_2 = 0, \quad (5.29)$$

então a função $u_1(x)$ pode ser escrita como

$$u_1(x) = \frac{4ql^4}{EI\pi^5} \text{sen}\left(\frac{\pi x}{l}\right), \quad (5.30)$$

dessa forma, a deflexão máxima, dada no ponto $x = \frac{l}{2}$, é igual a:

$$u_1\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{4ql^4}{EI\pi^5} = \frac{ql^4}{76,5049EI}. \quad (5.31)$$

Considera-se, então, uma nova função aproximadora

$$u_2(x) = a_1 \text{sen}\left(\frac{\pi x}{l}\right) + a_2 \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{l}\right) + a_3 \text{sen}\left(\frac{3\pi x}{l}\right), \quad (5.32)$$

o funcional resolvido resulta nos valores de a_i

$$a_1 = \frac{4ql^4}{EI\pi^5}; \quad a_2 = 0 \quad e \quad a_3 = \frac{4ql^4}{243EI\pi^5}, \quad (5.33)$$

a função $u_2(x)$ reescrita é

$$u_2(x) = \frac{4ql^4}{EI\pi^5} \text{sen}\left(\frac{\pi x}{l}\right) + \frac{4ql^4}{243EI\pi^5} \text{sen}\left(\frac{3\pi x}{l}\right) \quad (5.34)$$

e a deflexão máxima, no ponto $x = \frac{l}{2}$ é

$$u_2\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{968ql^4}{243EI\pi^5} = \frac{ql^4}{76,8210EI}. \quad (5.35)$$

A terceira função aproximadora $u_3(x)$ a ser analisada é

$$u_3(x) = a_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{l}\right) + a_2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{l}\right) + a_3 \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{l}\right) + a_4 \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi x}{l}\right), \quad (5.36)$$

resolvendo o funcional, os valores encontrados para a_i são:

$$a_1 = \frac{4ql^4}{EI\pi^5}; \quad a_2 = 0;$$

$$a_3 = \frac{4ql^4}{243EI\pi^5} \quad e \quad a_4 = 0, \quad (5.37)$$

reescrevendo a função $u_3(x)$, fica igual a função encontrada para $u_2(x)$

$$u_3(x) = u_2(x) = \frac{4ql^4}{EI\pi^5} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{l}\right) + \frac{4ql^4}{243EI\pi^5} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{l}\right) \quad (5.38)$$

e conseqüentemente, a deflexão máxima para essa função é a mesma encontrada para a função $u_2\left(\frac{l}{2}\right)$

$$u_3\left(\frac{l}{2}\right) = u_2\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{968ql^4}{243EI\pi^5} = \frac{ql^4}{76,8210EI}. \quad (5.39)$$

Admitindo mais uma função

$$u_4(x) = a_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{l}\right) + a_2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{l}\right) + a_3 \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{l}\right) \quad (5.40)$$

$$+ a_4 \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi x}{l}\right) + a_5 \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi x}{l}\right) \quad (5.41)$$

os valores obtidos para a_i ao resolver o funcional são

$$a_1 = \frac{4ql^4}{EI\pi^5}; \quad a_2 = 0; \quad a_3 = \frac{4ql^4}{243EI\pi^5};$$

$$a_4 = 0 \quad e \quad a_5 = \frac{4ql^4}{3125EI\pi^5}, \quad (5.42)$$

a função pode, então, ser reescrita da forma

$$u_4(x) = \frac{4ql^4}{EI\pi^5} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{l}\right) + \frac{4ql^4}{243EI\pi^5} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{l}\right) + \frac{4ql^4}{3125EI\pi^5} \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi x}{l}\right) \quad (5.43)$$

e então, a deflexão máxima para essa função é

$$u_4\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{ql^4}{76,7963EI}. \quad (5.44)$$

A próxima função a ser analisada é

$$u_5(x) = a_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{l}\right) + a_2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{l}\right) + a_3 \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{l}\right) \quad (5.45)$$

$$+ a_4 \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi x}{l}\right) + a_5 \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi x}{l}\right) + a_6 \operatorname{sen}\left(\frac{6\pi x}{l}\right), \quad (5.46)$$

com a resolução do funcional, obtêm-se os valores de a_i

$$a_1 = \frac{4ql^4}{EI\pi^5}; \quad a_2 = 0; \quad a_3 = \frac{4ql^4}{243EI\pi^5};$$

$$a_4 = 0; \quad a_5 = \frac{4ql^4}{3125EI\pi^5} \quad e \quad a_6 = 0, \quad (5.47)$$

então, a função aproximadora reescrita é

$$u_5(x) = \frac{4ql^4}{EI\pi^5} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{l}\right) + \frac{4ql^4}{243EI\pi^5} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{l}\right) + \frac{4ql^4}{3125EI\pi^5} \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi x}{l}\right), \quad (5.48)$$

que é igual a função aproximadora anterior $u_4(x)$. Por isso, a deflexão máxima para $u_5(\frac{l}{2})$ é, também, a mesma de $u_4(\frac{l}{2})$

$$u_5\left(\frac{l}{2}\right) = u_4\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{ql^4}{76,7963EI}. \quad (5.49)$$

A última função aproximadora trigonométrica a ser considerada para o Método de Rayleigh-Ritz é

$$u_6(x) = a_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{l}\right) + a_2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{l}\right) + a_3 \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{l}\right) + a_4 \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi x}{l}\right) \quad (5.50)$$

$$+ a_5 \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi x}{l}\right) + a_6 \operatorname{sen}\left(\frac{6\pi x}{l}\right) + a_7 \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi x}{l}\right), \quad (5.51)$$

tendo os seguintes valores para a_i obtidos por meio da resolução do funcional

$$a_1 = \frac{4ql^4}{EI\pi^5}; \quad a_2 = 0; \quad a_3 = \frac{4ql^4}{243EI\pi^5};$$

$$a_4 = 0; \quad a_5 = \frac{4ql^4}{3125EI\pi^5}; \quad a_6 = 0$$

$$e \quad a_7 = \frac{4ql^4}{16807EI\pi^5} \quad (5.52)$$

e reescrevendo a função $u_6(x)$ tem-se

$$u_6(x) = \frac{4ql^4}{EI\pi^5} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{l}\right) + \frac{4ql^4}{243EI\pi^5} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{l}\right) \quad (5.53)$$

$$+ \frac{4ql^4}{3125EI\pi^5} \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi x}{l}\right) + \frac{4ql^4}{16807EI\pi^5} \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi x}{l}\right), \quad (5.54)$$

logo, a deflexão máxima dada em $x = \frac{l}{2}$ é

$$u_6\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{ql^4}{76,8008EI}. \quad (5.55)$$

Analisando pelo Método de Galerkin, pode-se chegar à conclusão de que é inadequado utilizar funções aproximadoras polinomiais iguais as utilizadas para Rayleigh-Ritz para encontrar a deflexão na viga, pois para a equação diferencial que representa a energia potencial total da viga, tem-se:

$$\int_0^l [EI\bar{v}^{IV}(x) - q]\phi_i dx = \int_0^l [EI\bar{v}^{IV}(x)]\phi_i dx - \int_0^l q\phi_i dx = 0, \quad (5.56)$$

portanto, só é possível determinar os valores dos parâmetros a_i para outro tipo de função polinomial que tenha o menor grau igual a 4, pois para substituir na integral é necessário efetuar a quarta derivada da função aproximadora.

Considerando as 6 funções aproximadoras polinomiais, de menor grau igual a 4, variando de 2 a 7 termos, o resultado obtido para deflexão máxima no ponto $x = \frac{l}{2}$ para todas as funções é sempre igual a $\frac{ql^4}{384EI}$. Lembrando que a solução exata é $\frac{ql^4}{76,8EI}$, nota-se que a solução obtida pelo método está muito longe. Porém, se forem considerados muitos mais termos na função aproximadora, é possível obter uma solução próxima. Dessa forma, as funções aproximadoras polinomiais para este método foram desconsideradas e serão analisadas somente as funções trigonométricas.

A primeira função trigonométrica a ser analisada é

$$w_1(x) = a_1 \text{sen}\left(\frac{\pi x}{l}\right) + a_2 \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{l}\right), \quad (5.57)$$

ao aplicar as condições de ortogonalidade conforme o método, obtém-se;

$$a_1 = \frac{4ql^4}{EI\pi^5} \quad e \quad a_2 = 0, \quad (5.58)$$

então a função pode ser escrita como

$$w_1(x) = \frac{4ql^4}{EI\pi^5} \text{sen}\left(\frac{\pi x}{l}\right) \quad (5.59)$$

e a deflexão máxima é

$$w_1\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{4ql^4}{EI\pi^5} = \frac{ql^4}{76,5049EI}. \quad (5.60)$$

A próxima função aproximadora é

$$w_2(x) = a_1 \text{sen}\left(\frac{\pi x}{l}\right) + a_2 \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{l}\right) + a_3 \text{sen}\left(\frac{3\pi x}{l}\right), \quad (5.61)$$

aplicando o método, os valores obtidos para a_i são:

$$a_1 = \frac{4ql^4}{EI\pi^5}; \quad a_2 = 0 \quad e \quad a_3 = \frac{4ql^4}{243EI\pi^5}, \quad (5.62)$$

substituindo na função aproximadora $w_2(x)$, obtem-se:

$$w_2(x) = \frac{4ql^4}{EI\pi^5} \text{sen}\left(\frac{\pi x}{l}\right) + \frac{4ql^4}{243EI\pi^5} \text{sen}\left(\frac{3\pi x}{l}\right) \quad (5.63)$$

e a deflexão máxima, dada no ponto $x = \frac{l}{2}$ é

$$w_2\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{968ql^4}{243EI\pi^5} = \frac{ql^4}{76,8210EI}. \quad (5.64)$$

Admitindo uma terceira função aproximadora $w_3(x)$

$$w_3(x) = a_1 \text{sen}\left(\frac{\pi x}{l}\right) + a_2 \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{l}\right) + a_3 \text{sen}\left(\frac{3\pi x}{l}\right) + a_4 \text{sen}\left(\frac{4\pi x}{l}\right), \quad (5.65)$$

a partir do método, tem-se:

$$a_1 = \frac{4ql^4}{EI\pi^5}; \quad a_2 = 0;$$

$$a_3 = \frac{4ql^4}{243EI\pi^5} \quad e \quad a_4 = 0, \quad (5.66)$$

a função, então, fica igual $w_2(x)$

$$w_3(x) = w_2(x) = \frac{4ql^4}{EI\pi^5} \text{sen}\left(\frac{\pi x}{l}\right) + \frac{4ql^4}{243EI\pi^5} \text{sen}\left(\frac{3\pi x}{l}\right), \quad (5.67)$$

consequentemente, a deflexão máxima para $w_3\left(\frac{l}{2}\right)$, também é igual a deflexão máxima de $w_2(x) = \frac{l}{2}$, que é

$$w_3\left(\frac{l}{2}\right) = w_2\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{968ql^4}{243EI\pi^5} = \frac{ql^4}{76,8210EI}. \quad (5.68)$$

Considerando mais uma função aproximadora:

$$w_4(x) = a_1 \text{sen}\left(\frac{\pi x}{l}\right) + a_2 \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{l}\right) + a_3 \text{sen}\left(\frac{3\pi x}{l}\right) \quad (5.69)$$

$$+ a_4 \text{sen}\left(\frac{4\pi x}{l}\right) + a_5 \text{sen}\left(\frac{5\pi x}{l}\right), \quad (5.70)$$

para essa função os valores encontrados para a_i a partir do método são:

$$a_1 = \frac{4ql^4}{EI\pi^5}; \quad a_2 = 0; \quad a_3 = \frac{4ql^4}{243EI\pi^5};$$

$$a_4 = 0 \quad e \quad a_5 = \frac{4ql^4}{3125EI\pi^5}, \quad (5.71)$$

a função $w_4(x)$ reescrita é

$$w_4(x) = \frac{4ql^4}{EI\pi^5} \text{sen}\left(\frac{\pi x}{l}\right) + \frac{4ql^4}{243EI\pi^5} \text{sen}\left(\frac{3\pi x}{l}\right) + \frac{4ql^4}{3125EI\pi^5} \text{sen}\left(\frac{5\pi x}{l}\right) \quad (5.72)$$

e a deflexão máxima para $w_4\left(\frac{l}{2}\right)$ é

$$w_4\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{ql^4}{76,7963EI}. \quad (5.73)$$

A próxima função aproximadora a ser analisada é

$$w_5(x) = a_1 \text{sen}\left(\frac{\pi x}{l}\right) + a_2 \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{l}\right) + a_3 \text{sen}\left(\frac{3\pi x}{l}\right) \quad (5.74)$$

$$+ a_4 \text{sen}\left(\frac{4\pi x}{l}\right) + a_5 \text{sen}\left(\frac{5\pi x}{l}\right) + a_6 \text{sen}\left(\frac{6\pi x}{l}\right), \quad (5.75)$$

por meio do método tem-se:

$$a_1 = \frac{4ql^4}{EI\pi^5}; \quad a_2 = 0; \quad a_3 = \frac{4ql^4}{243EI\pi^5};$$

$$a_4 = 0; \quad a_5 = \frac{4ql^4}{3125EI\pi^5} \quad e \quad a_6 = 0, \quad (5.76)$$

reescrevendo a função aproximadora

$$w_5(x) = \frac{4ql^4}{EI\pi^5} \text{sen}\left(\frac{\pi x}{l}\right) + \frac{4ql^4}{243EI\pi^5} \text{sen}\left(\frac{3\pi x}{l}\right) + \frac{4ql^4}{3125EI\pi^5} \text{sen}\left(\frac{5\pi x}{l}\right), \quad (5.77)$$

conclui-se que a função $w_5(x)$ é igual a função $w_4(x)$. Dessa forma, a deflexão máxima também é a mesma

$$w_5\left(\frac{l}{2}\right) = w_4\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{ql^4}{76,7963EI}. \quad (5.78)$$

A última função a ser analisada é

$$w_6(x) = a_1 \text{sen}\left(\frac{\pi x}{l}\right) + a_2 \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{l}\right) + a_3 \text{sen}\left(\frac{3\pi x}{l}\right) + a_4 \text{sen}\left(\frac{4\pi x}{l}\right) \quad (5.79)$$

$$+ a_5 \text{sen}\left(\frac{5\pi x}{l}\right) + a_6 \text{sen}\left(\frac{6\pi x}{l}\right) + a_7 \text{sen}\left(\frac{7\pi x}{l}\right), \quad (5.80)$$

aplicando o método para essa função aproximadora, os valores encontrados de a_i são:

$$a_1 = \frac{4ql^4}{EI\pi^5}; \quad a_2 = 0; \quad a_3 = \frac{4ql^4}{243EI\pi^5};$$

$$a_4 = 0 ; \quad a_5 = \frac{4ql^4}{3125EI\pi^5} ; \quad a_6 = 0$$

$$e \quad a_7 = \frac{4ql^4}{16807EI\pi^5}, \quad (5.81)$$

a função $w_6(x)$ pode ser reescrita como

$$w_6(x) = \frac{4ql^4}{EI\pi^5} \text{sen}\left(\frac{\pi x}{l}\right) + \frac{4ql^4}{243EI\pi^5} \text{sen}\left(\frac{3\pi x}{l}\right) \quad (5.82)$$

$$+ \frac{4ql^4}{3125EI\pi^5} \text{sen}\left(\frac{5\pi x}{l}\right) + \frac{4ql^4}{16807EI\pi^5} \text{sen}\left(\frac{7\pi x}{l}\right) \quad (5.83)$$

e para essa função, a deflexão máxima para $w_6\left(\frac{l}{2}\right)$ é

$$w_6\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{ql^4}{76,8008EI}. \quad (5.84)$$

Considerando as funções aproximadoras analisadas, com 2 termos até 7 termos, para os dois métodos, é feita uma comparação das deflexões máximas encontradas para cada uma, como mostra a tabela a seguir:

Tabela 1 - Deflexão máxima

Deflexão Máxima			
Número de termos	Rayleigh-Ritz polinomial	Rayleigh-Ritz trigonométrica	Galerkin trigonométrica
2	0	$\frac{ql^4}{76,5049EI}$	$\frac{ql^4}{76,5049EI}$
3	$\frac{ql^4}{96EI}$	$\frac{ql^4}{76,8210EI}$	$\frac{ql^4}{76,8210EI}$
4	$\frac{ql^4}{96EI}$	$\frac{ql^4}{76,8210EI}$	$\frac{ql^4}{76,8210EI}$
5	$\frac{ql^4}{76,8EI}$	$\frac{ql^4}{76,7963EI}$	$\frac{ql^4}{76,7963EI}$
6	$\frac{ql^4}{76,8EI}$	$\frac{ql^4}{76,7963EI}$	$\frac{ql^4}{76,7963EI}$
7	$\frac{ql^4}{76,8EI}$	$\frac{ql^4}{76,8008EI}$	$\frac{ql^4}{76,8008EI}$

Fonte: Próprio autor, 2018.

Analisando a tabela, é possível concluir que os resultados obtidos são próximos uns dos outros e próximos também da solução exata. Por isso, os resultados são

considerados satisfatórios e podem ser aplicados na Engenharia Civil. Nota-se que, para o caso estudado, o melhor método é Rayleigh-Ritz, por conseguir obter a solução exata.

Comparando quanto a solução exata, a tabela pode ser reescrita em função da diferença das soluções para deflexão máxima, dividindo a solução aproximada pela solução exata.

Tabela 2 - Diferença das soluções para deflexão máxima

Diferença das Soluções para Deflexão Máxima			
Número de termos	Rayleigh-Ritz polinomial	Rayleigh-Ritz trigonométrica	Galerkin trigonométrica
2	0	1,003857269	1,003857269
3	0,8	0,999726637	0,999726637
4	0,8	0,999726637	0,999726637
5	1	1,000048179	1,000048179
6	1	1,000048179	1,000048179
7	1	0,999989583	0,999989583

Fonte: Próprio autor, 2018.

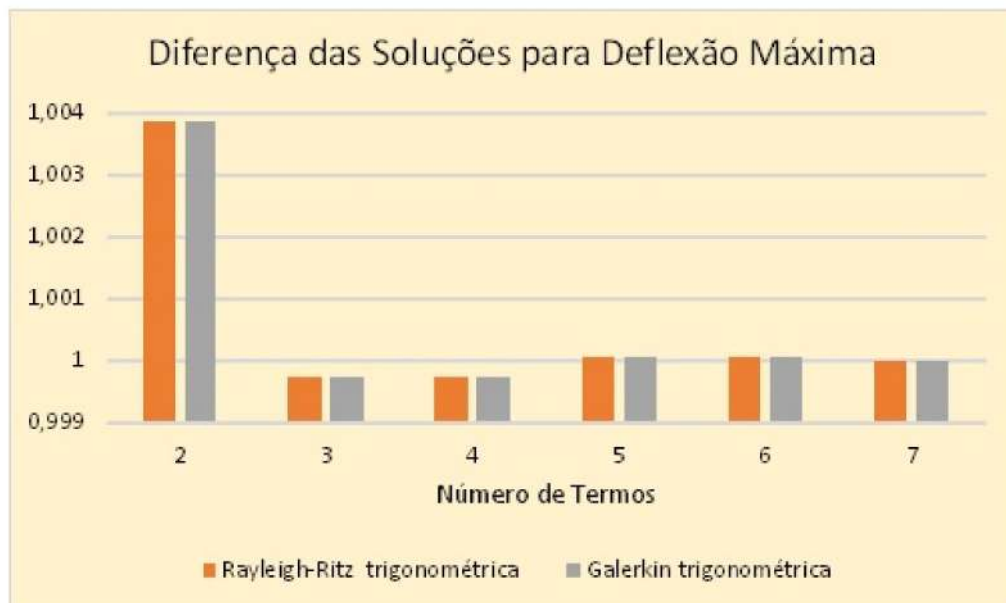
Nota-se que quanto mais próximo de 1, mais próxima a solução aproximada da solução exata. A comparação pode ser vista de forma melhor através dos dois gráficos a seguir:

Gráfico 1 - Diferença das soluções para deflexão máxima na função polinomial pelo Método de Rayleigh-Ritz



Fonte: Próprio autor, 2018.

Gráfico 2 - Diferença das soluções para deflexão máxima nas funções trigonométricas pelo Método de Galerkin



Fonte: Próprio autor, 2018.

Capítulo 6

Considerações Finais

6.1 Conclusão

A partir do estudo realizado, é possível concluir que os métodos de Rayleigh-Ritz e de Galerkin são eficazes pois é possível obter uma solução igual ou próxima da solução exata, e que quanto mais termos compuserem a função aproximadora, mais a solução convergirá para a exata. Consequentemente, uma função de muitos termos gera um sistema composto por muitas incógnitas, inviável de se calcular manualmente. Por esse motivo é necessário o auxílio de softwares para realizar os cálculos.

Pelo fato de às vezes ser necessário utilizar uma função aproximadora de muitos termos para que a solução se aproxime da solução exata, as funções aproximadoras trigonométricas são mais recomendadas por serem mais facilmente manipuladas.

Comparando quanto à dificuldade dos métodos em relação ao cálculo de deflexão em vigas, o Método de Galerkin é mais fácil de ser aplicado porque não é preciso efetuar um produto notável (que na maioria dos casos, gera uma equação muito extensa), porém para este método é importante que as funções aproximadoras apresentem algum tipo de ortogonalidade.

Devido à equação diferencial de equilíbrio da viga e a função aproximadora polinomial escolhida, as soluções para deflexão máxima não foram satisfatórias. Sendo assim, não foi possível buscar uma solução a partir de uma função aproximadora em termos de polinômios para o cálculo de deflexão por meio do Método de Galerkin, pois é necessário considerar uma função aproximadora com muitos termos para obter uma solução próxima à solução exata.

Se o problema em estudo está relacionado com uma solução em termos de polinômios, ou de forma geral, se o problema está relacionado com funções que não apresentem ortogonalidade, o Método de Rayleigh-Ritz é melhor, como é o caso da viga analisada neste trabalho.

A dificuldade em aplicar o Método de Rayleigh-Ritz é encontrar o funcional que descreve o problema, pois montar um funcional é muito complexo. Como o Método de Galerkin se baseia apenas na equação diferencial, e a maioria dos problemas na Engenharia consiste em encontrar uma solução para uma equação diferencial, esse método é mais utilizado.

Para a viga analisada nesse trabalho, a solução exata pôde ser obtida facilmente através do Método de Rayleigh-Ritz, admitindo uma função aproximadora polinomial de apenas 5 termos, apesar das funções trigonométricas para ambos os métodos resultarem sempre na mesma solução, e sempre muito próximas da solução exata.

6.2 Sugestões de Pesquisas Futuras

- Aplicar os métodos para uma viga sujeita à uma carga pontual e comparar as soluções;
- Comparar os resultados obtidos para uma viga em balanço, aplicando os métodos;
- Testar funções aproximadoras com mais termos;
- Fazer as mesmas análises comparatórias deste trabalho, para a mesma viga, mas testando funções polinomiais e trigonométricas diferentes;
- Utilizar a transformada de Laplace para resolver o problema de equações diferenciais em vigas;
- Analisar um elemento bidimensional.

Capítulo 7

Referências Bibliográficas

ASSAN, Aloisio Ernesto. **Método dos elementos finitos: primeiros passos**. 2ª ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2003.

LOTTI, Raquel S.; MACHADO, André W.; MAZZIEIRO, Ênio T., JÚNIOR, Janes Landre. **Aplicabilidade científica do método dos elementos finitos**. Artigo. Maringá, 2006.

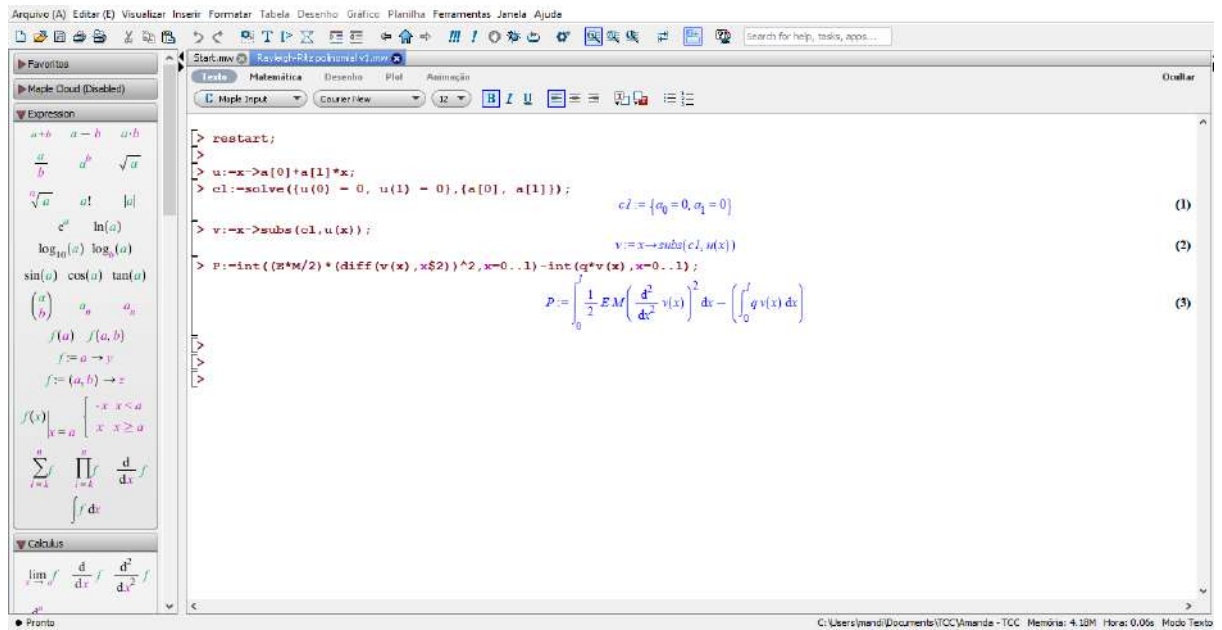
ALVES, Lucas M. **Introdução aos métodos aproximados em engenharia: Álgebra Linear, Geometria Analítica, Cálculo e Equações Diferenciais**. Tese de Doutorado. Departamento de Matemática, Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2007.

GIACCHINI, Bruno L. **Uma breve introdução ao Método dos Elementos Finitos**. Departamento de Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais. Minas Gerais, 2012.

ALVES, Michell M.; PROENÇA, Sergio P. B. **Emprego do método de resíduos ponderados para a análise de tubos**. Cadernos de Engenharia de Estruturas. São Carlos, 2008.

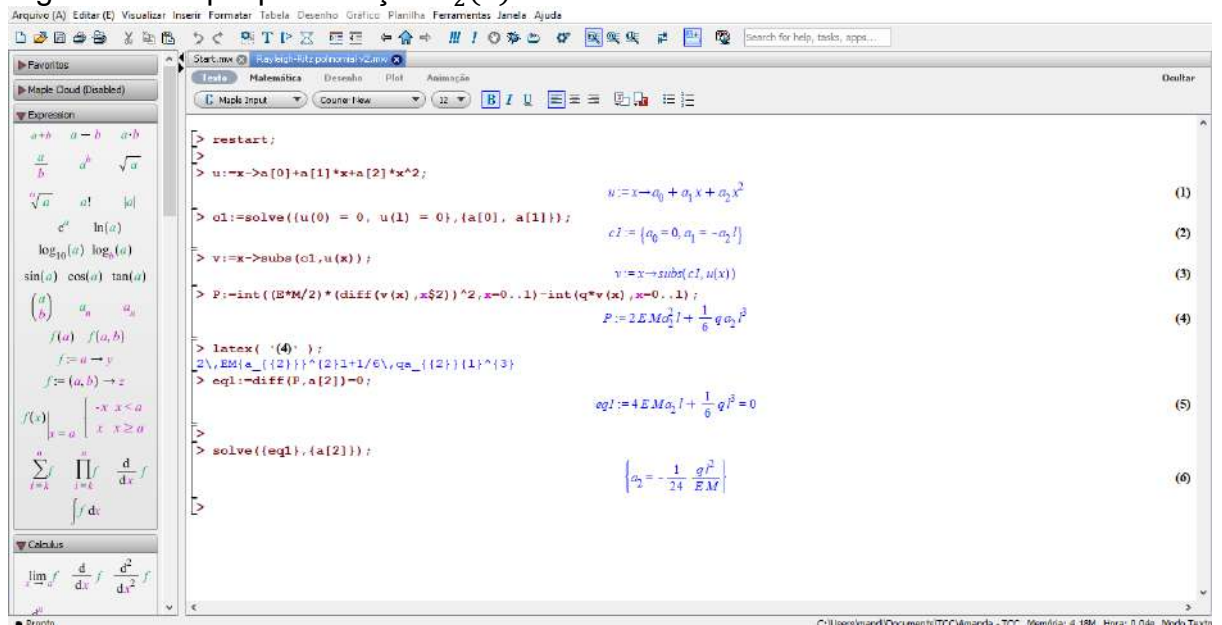
ANEXO A

Figura 7 – Maple para função $v_1(x)$.



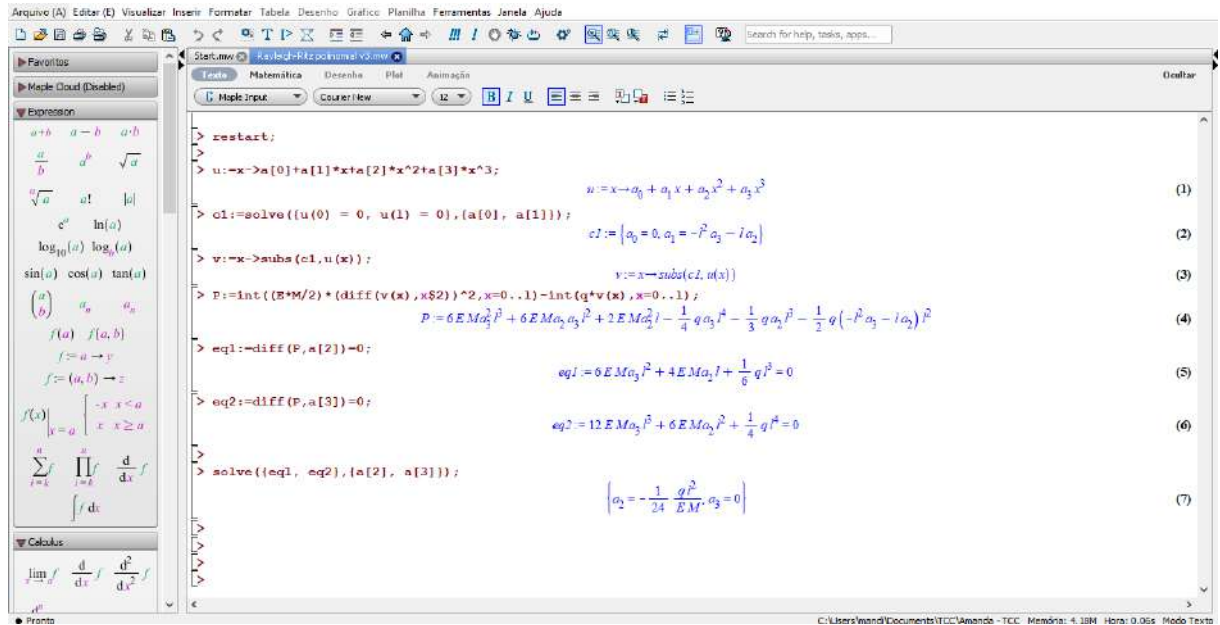
Fonte: Próprio autor, 2018.

Figura 8 – Maple para função $v_2(x)$.



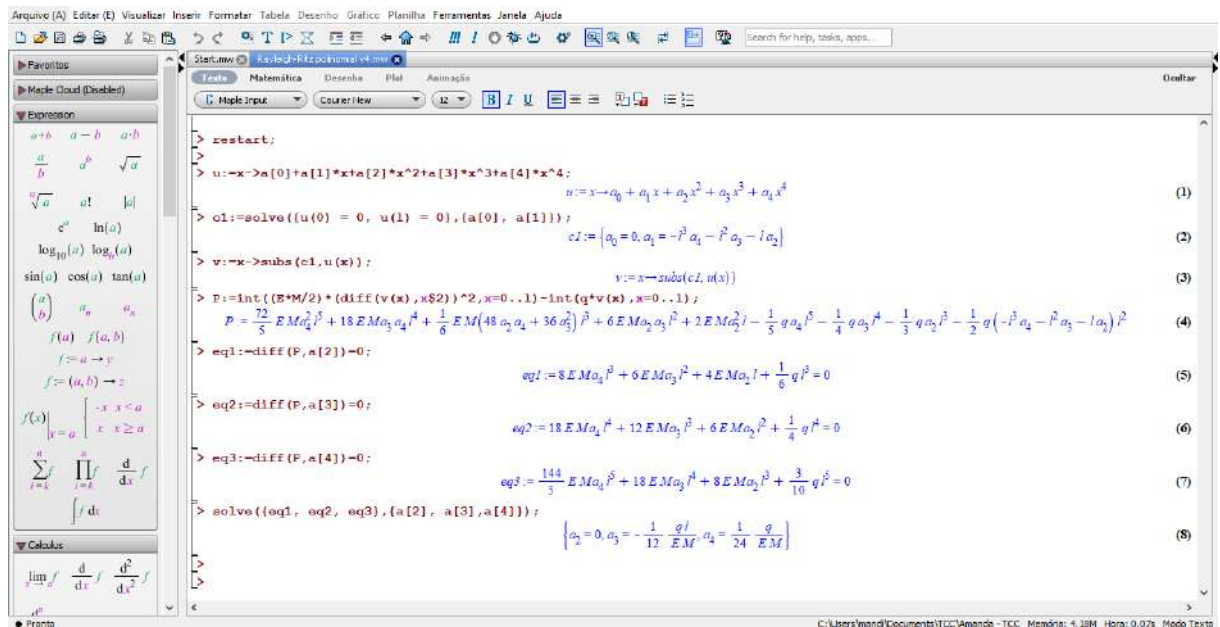
Fonte: Próprio autor, 2018.

Figura 9 – Maple para função $v_3(x)$.



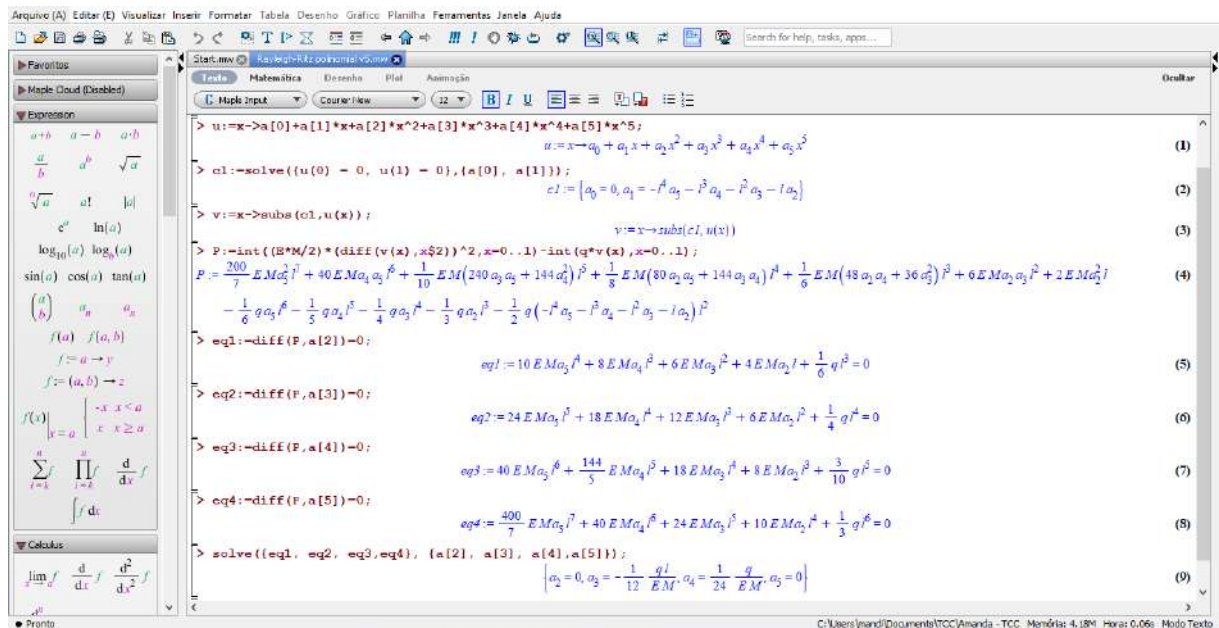
Fonte: Próprio autor, 2018.

Figura 10 – Maple para função $v_4(x)$.



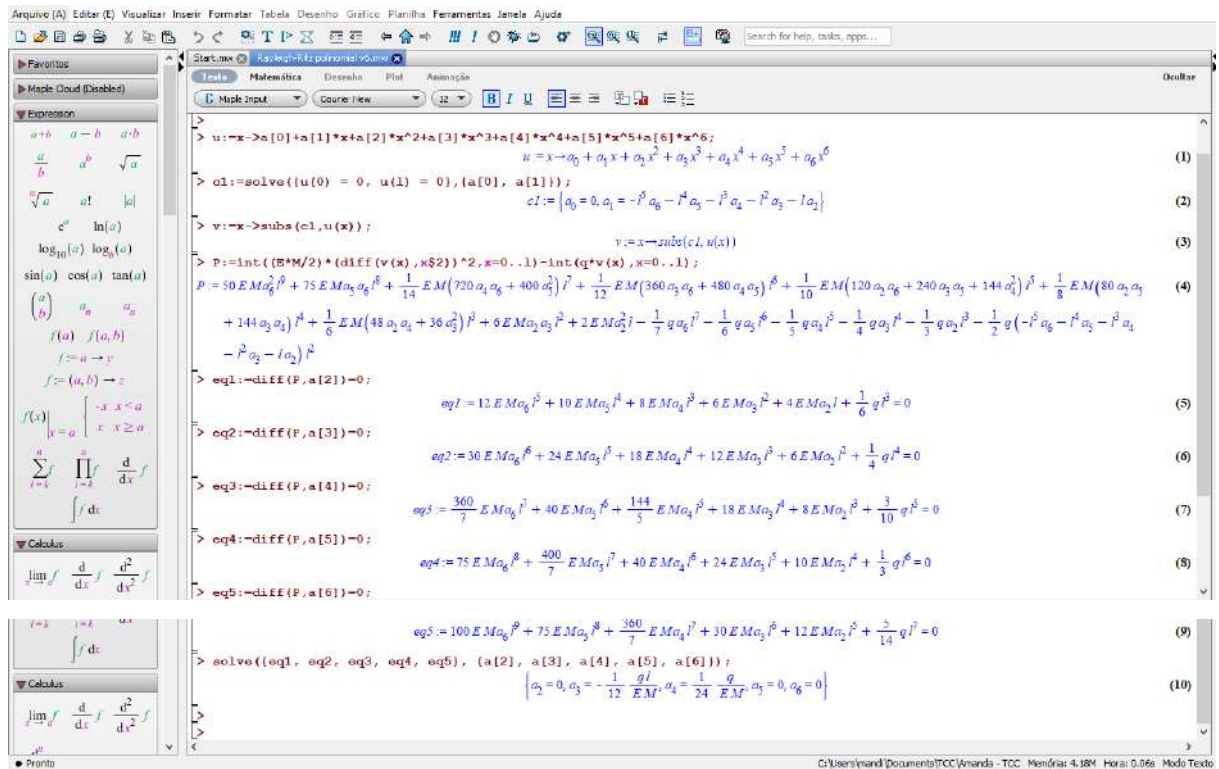
Fonte: Próprio autor, 2018.

Figura 11 – Maple para função $v_5(x)$.



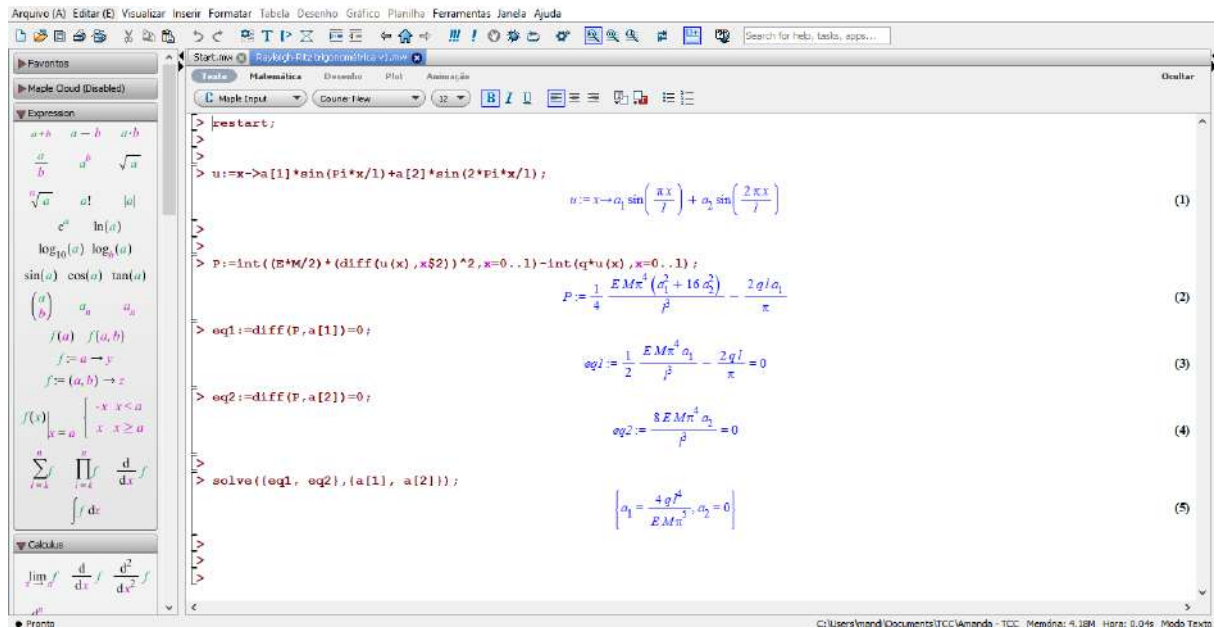
Fonte: Próprio autor, 2018.

Figura 12 – Maple para função $v_6(x)$.



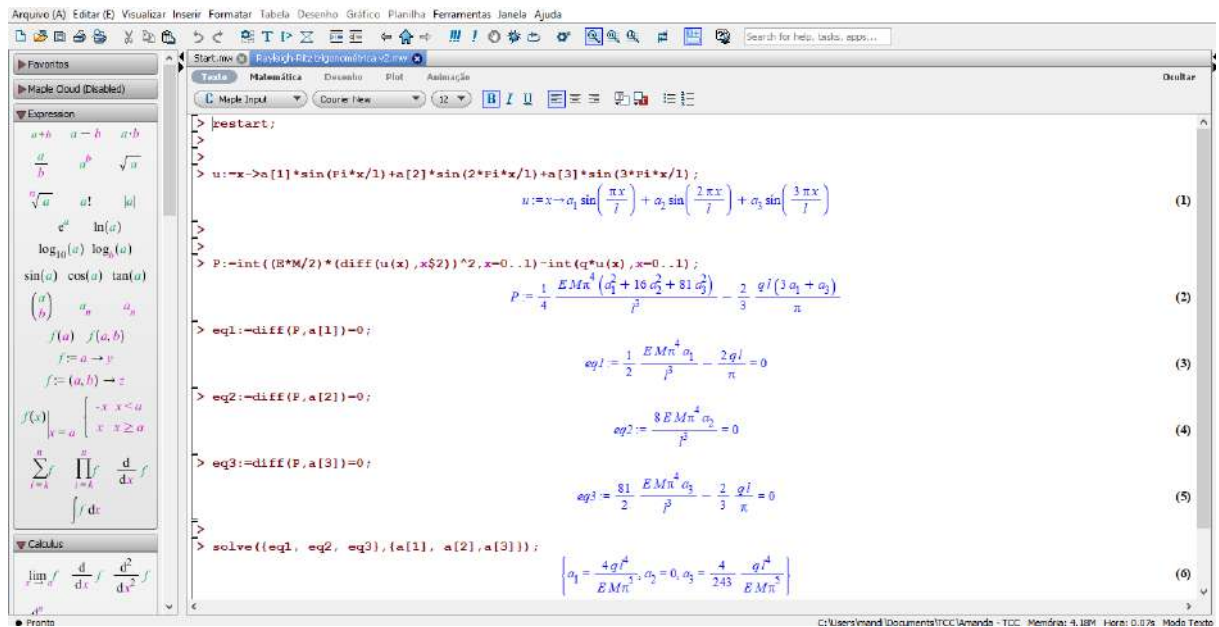
Fonte: Próprio autor, 2018.

Figura 13 – Maple para função $u_1(x)$.



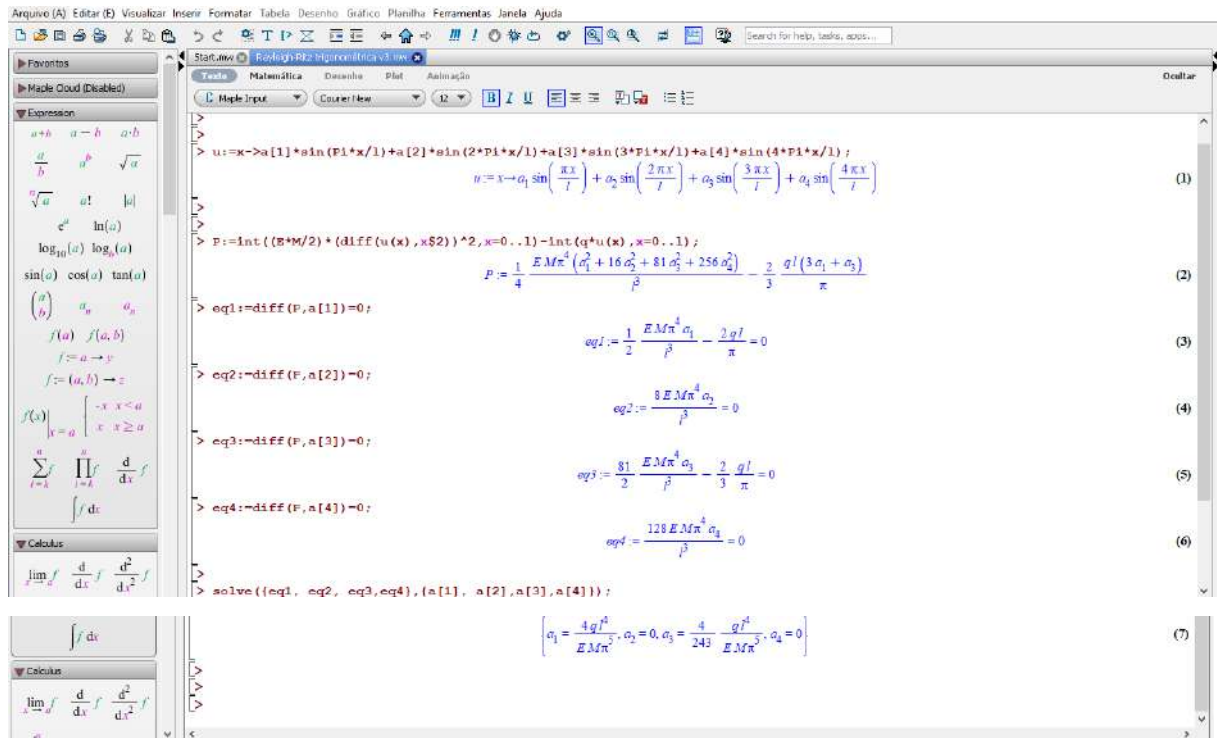
Fonte: Próprio autor, 2018.

Figura 14 – Maple para função $u_2(x)$.



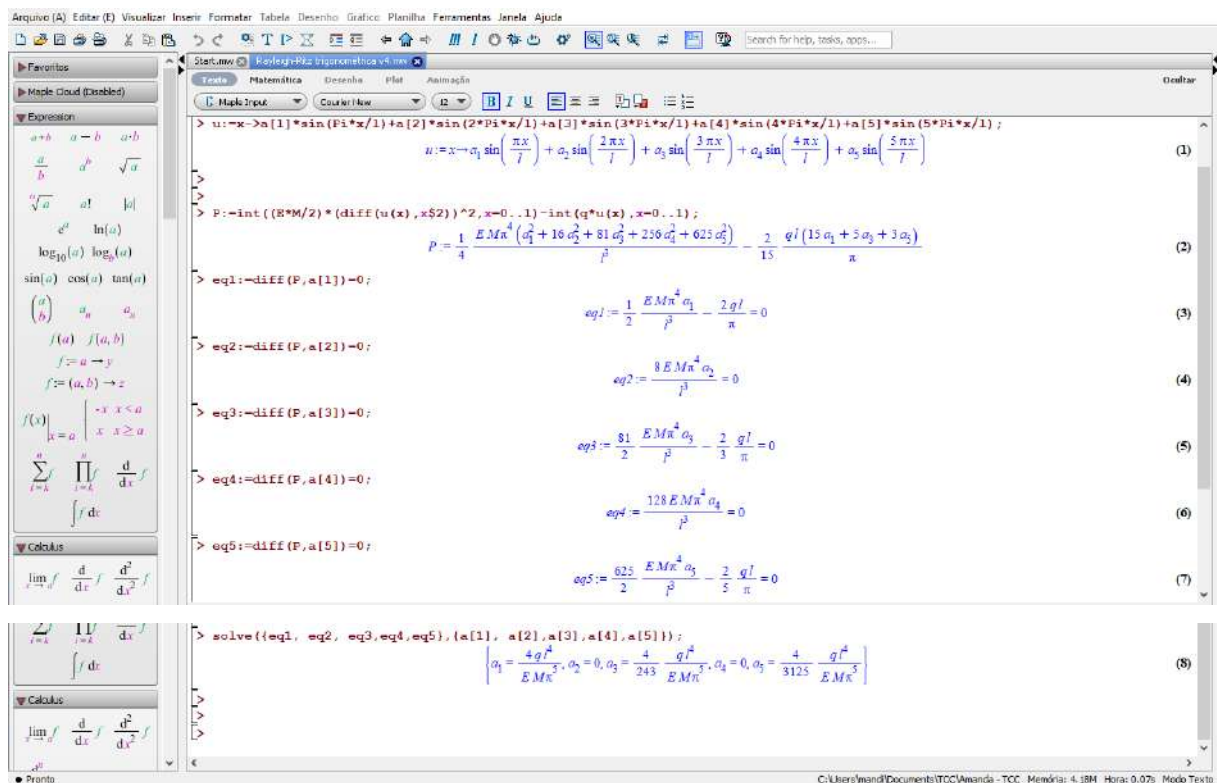
Fonte: Próprio autor, 2018.

Figura 15 – Maple para função $u_3(x)$.



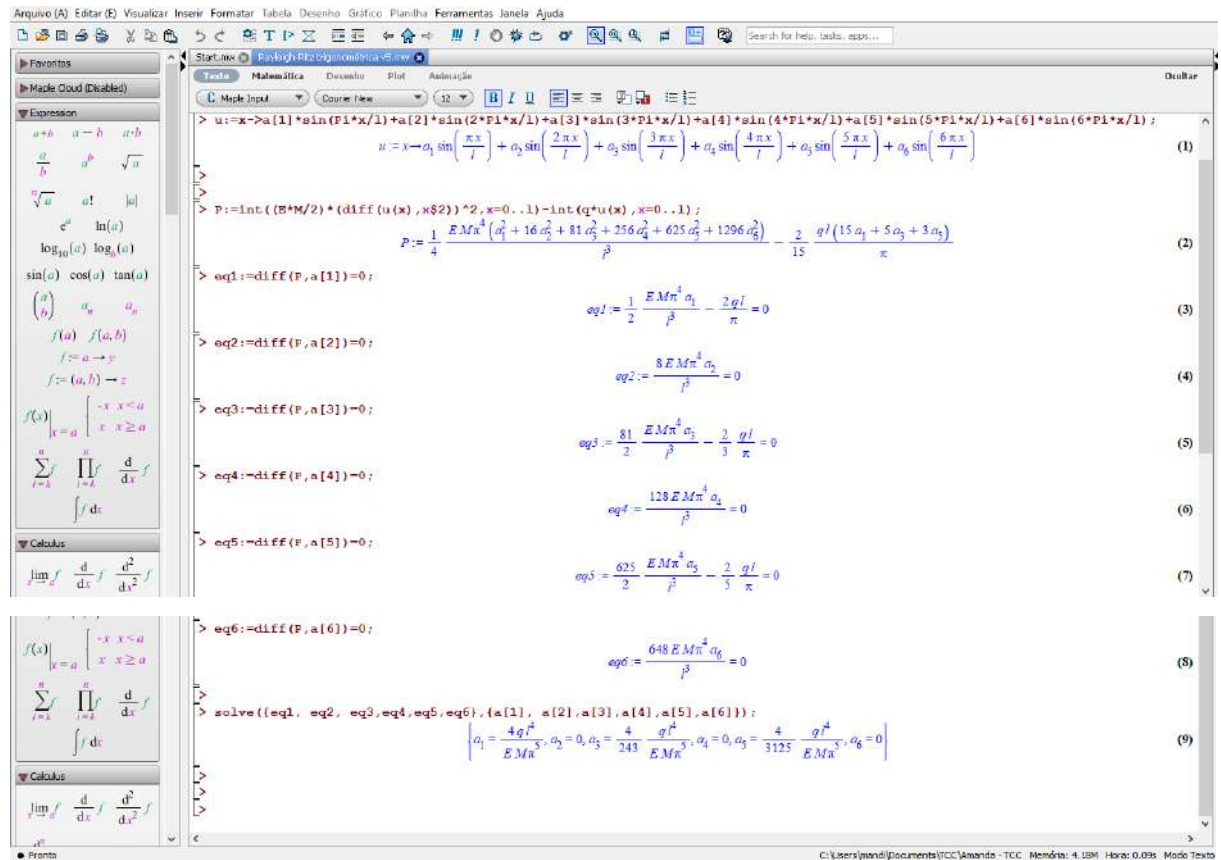
Fonte: Próprio autor, 2018.

Figura 16 – Maple para função $u_4(x)$.



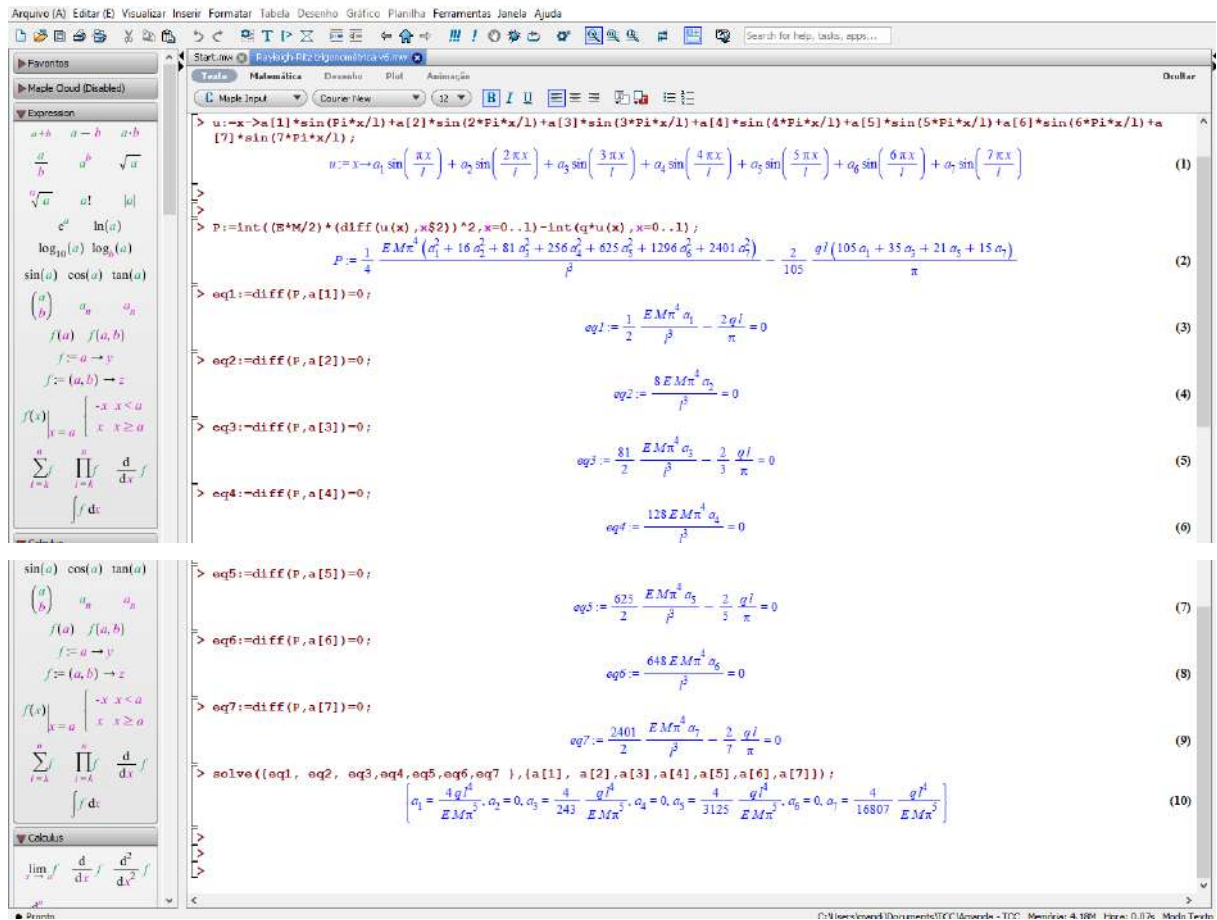
Fonte: Próprio autor, 2018.

Figura 17 – Maple para função $u_5(x)$.



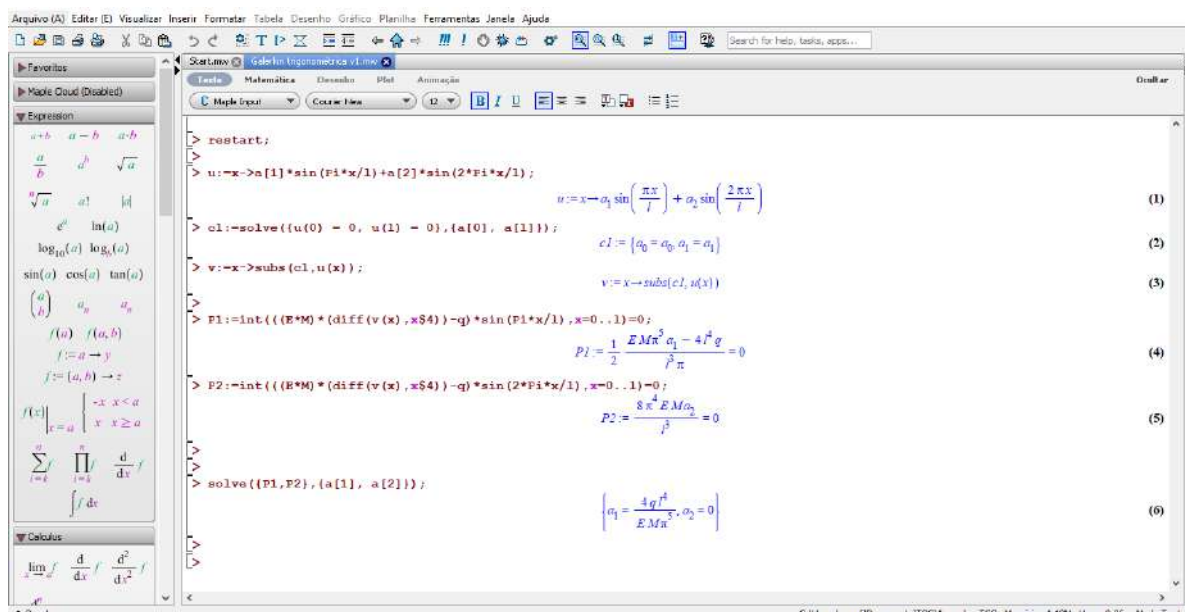
Fonte: Próprio autor, 2018.

Figura 18 – Maple para função $u_6(x)$.



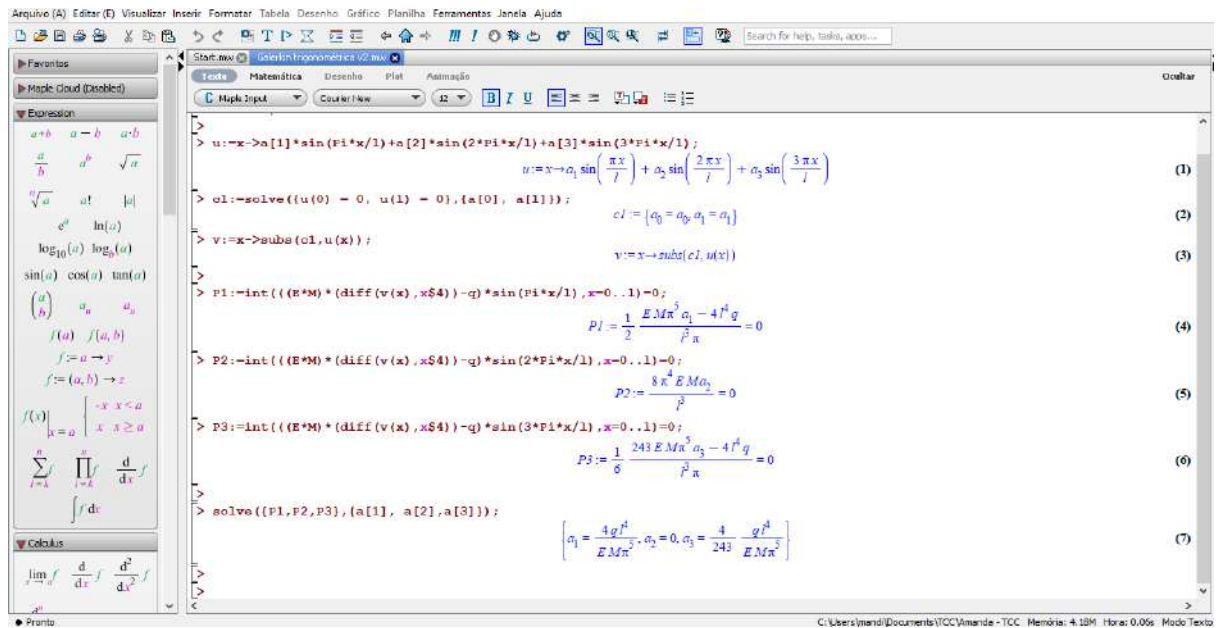
Fonte: Próprio autor, 2018.

Figura 19 – Maple para função $w_1(x)$.



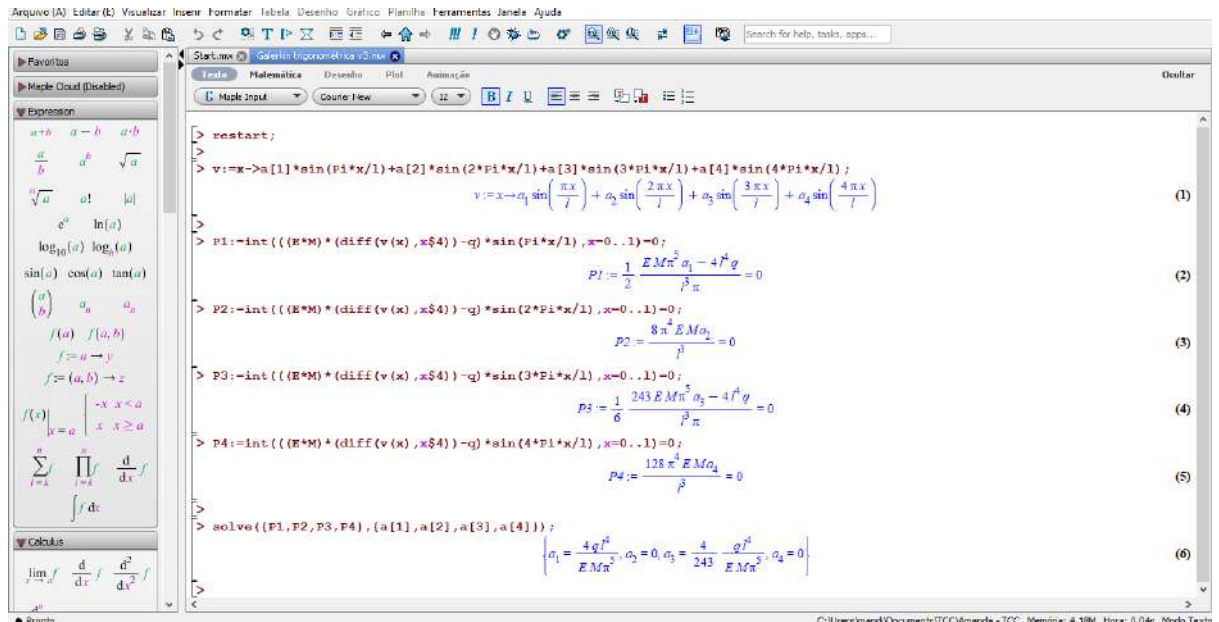
Fonte: Próprio autor, 2018.

Figura 20 – Maple para função $w_2(x)$.



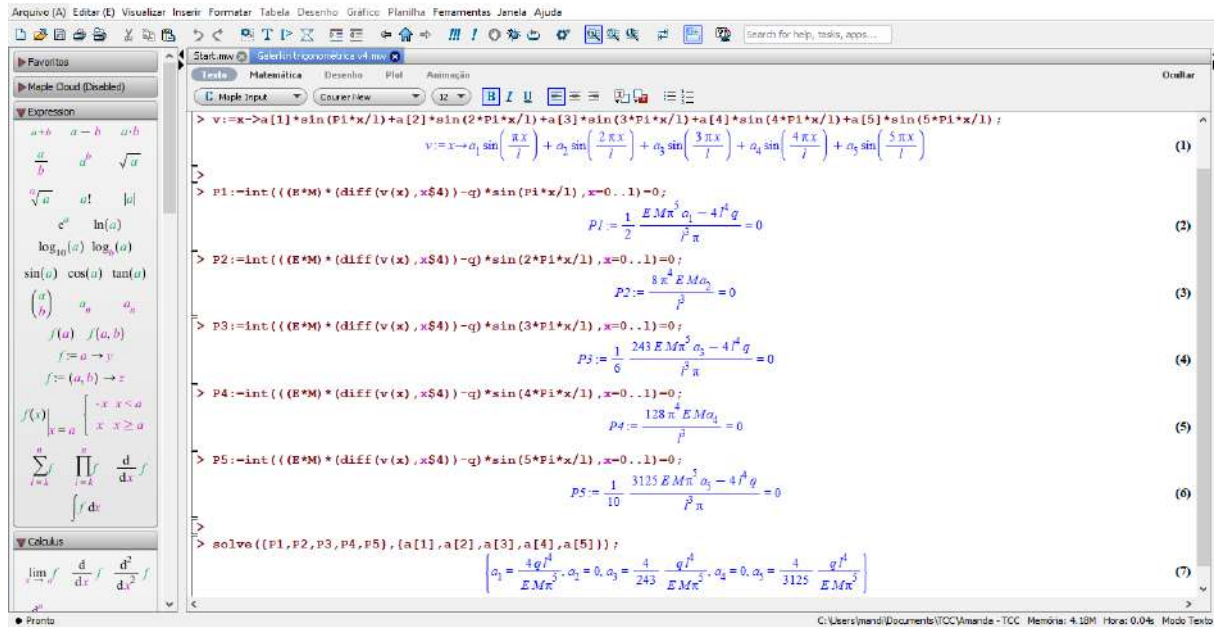
Fonte: Próprio autor, 2018.

Figura 21 – Maple para função $w_3(x)$.



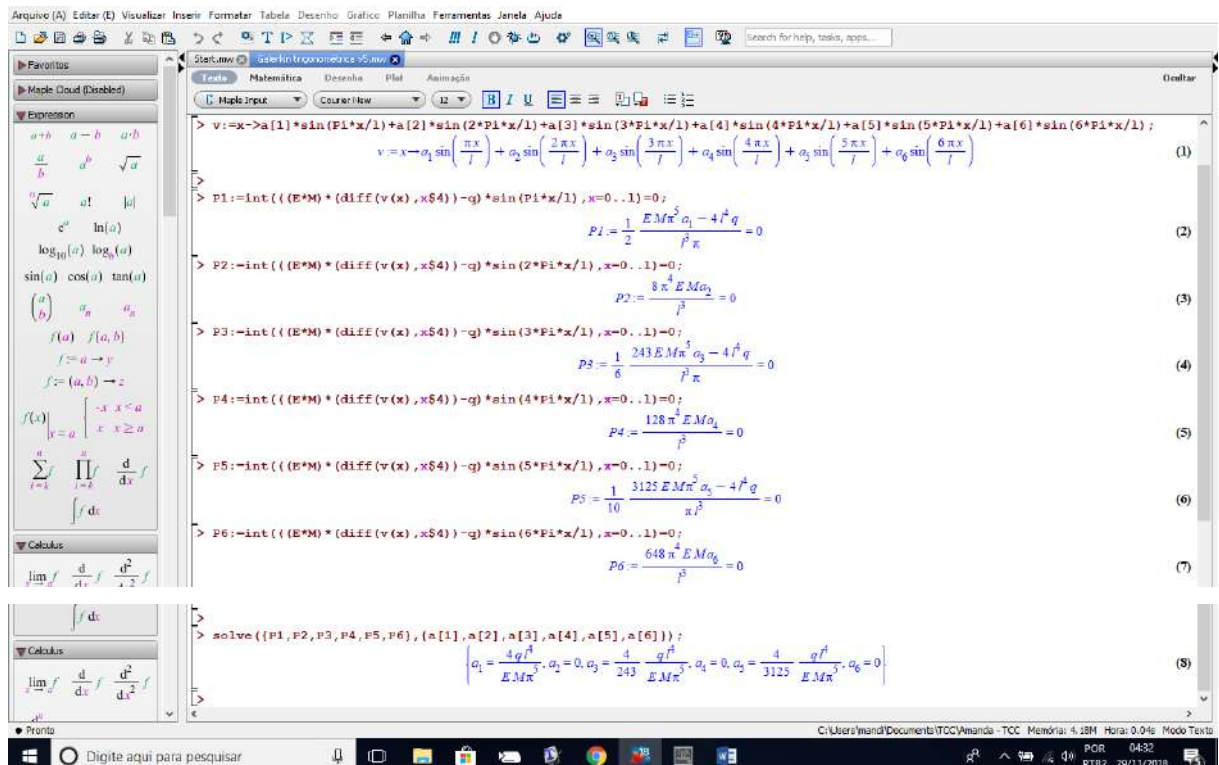
Fonte: Próprio autor, 2018.

Figura 22 – Maple para função $w_4(x)$.



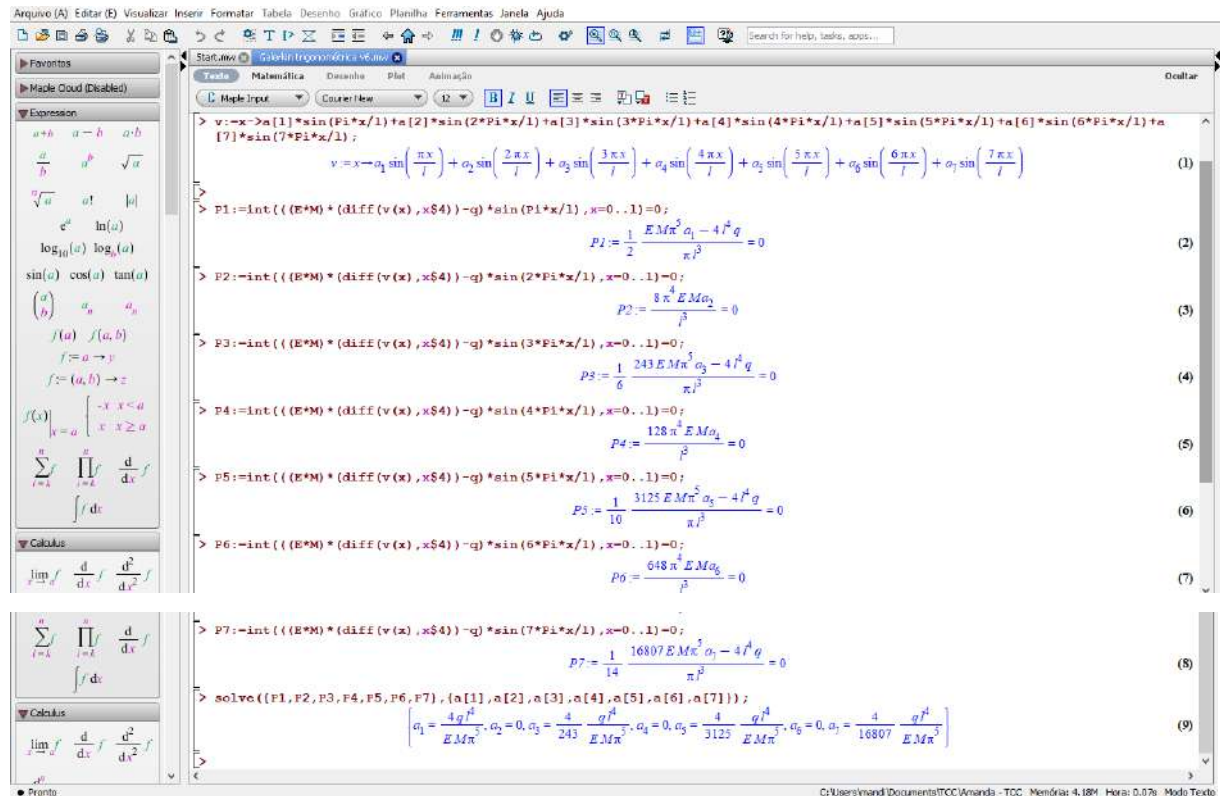
Fonte: Próprio autor, 2018.

Figura 23 – Maple para função $w_5(x)$.



Fonte: Próprio autor, 2018.

Figura 24 – Maple para função $w_6(x)$.



Fonte: Próprio autor, 2018.